後期 L01 演習問題

IV $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$A\text{は正則} \Leftrightarrow \Phi_A(0) \neq 0$$

が成立することを証明しましょう。

解答

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 \ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3|$$

に $\lambda = 0$ を代入すると

$$\Phi_A(0) = |-\vec{a}_1 \ \ -\vec{a}_2 \ \ -\vec{a}_3| = (-1)^3 \, |\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3| = -|A|$$

から

$$\Phi_A(0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A\text{は正則である}$$

ことが分かります.

V (演習 8.1)$A \in M_3(\mathbf{K})$ を $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3)$ と列ベクトル表示をするとき

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 \ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3|$$

において各列の線型性を用いて展開して

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A)$$

において

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \lambda \, |\vec{e}_1 \ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| - |\vec{a}_1 \ \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| \\
&= \lambda^2 \, |\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| - \lambda \, |\vec{e}_1 \ \ -\vec{a}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| \\
&\quad - \lambda \, |\vec{a}_1 \ \vec{e}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| + |\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3| \\
&= \lambda^3 \, |\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3| - \lambda^2 \, |\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{a}_3| - \lambda^2 \, |\vec{e}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{e}_3| + \lambda \, |\vec{e}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3| \\
&\quad - \lambda^2 \, |\vec{a}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3| + \lambda \, |\vec{a}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{a}_3| + \lambda \, |\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{e}_3| - \lambda \, |\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3| \\
&= \lambda^3 - \lambda^2 \left(|\vec{a}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3| + |\vec{e}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{e}_3| + |\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{a}_3| \right) \\
&\quad + \lambda \left(|\vec{e}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3| + |\vec{a}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{a}_3| + |\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{e}_3| \right) - \det(A)
\end{aligned}$$

となります．さらに

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \\
|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| &= \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = a_{22} \\
|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
|\vec{e}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3| &= \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
|\vec{a}_1\ \vec{e}_2\ \vec{a}_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{e}_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

であることを用いると

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A)$$

において

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成立することが分かります．

VI $\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t)$ を 3 次元ベクトルに値をとる微分可能な関数とします．このとき

$$\frac{d}{dt}\left|\vec{a}(t)\ \vec{b}(t)\ \vec{c}(t)\right| = \left|\frac{d}{dt}\vec{a}(t)\ \vec{b}(t)\ \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t)\ \frac{d}{dt}\vec{b}(t)\ \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t)\ \vec{b}(t)\ \frac{d}{dt}\vec{c}(t)\right|$$

を示しましょう．これを用いて

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + c_1\lambda - \det(A)$$

において

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\left|\vec{a}(t) \quad \vec{b}(t) \quad \vec{c}(t)\right| = \sum_{*} \varepsilon(i,j,k) \cdot a_i(t) b_j(t) c_k(t)$$

の両辺を微分するために一般化された Leibiniz の公式

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

を用います（ここで*はすべての順列 (i,j,k) に関する和であることを意味します）.

$$\begin{aligned}
&\left|\vec{a}(t) \quad \vec{b}(t) \quad \vec{c}(t)\right| \\
&= \sum_{*} \varepsilon(i,j,k) \cdot a_i'(t) b_j(t) c_k(t) + \sum_{*} \varepsilon(i,j,k) \cdot a_i(t) b_j'(t) c_k(t) + \sum_{*} \varepsilon(i,j,k) \cdot a_i(t) b_j(t) c_k'(t) \\
&= \left|\tfrac{d}{dt}\vec{a}(t) \quad \vec{b}(t) \quad \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t) \quad \tfrac{d}{dt}\vec{b}(t) \quad \vec{c}(t)\right| + \left|\vec{a}(t) \quad \vec{b}(t) \quad \tfrac{d}{dt}\vec{c}(t)\right|
\end{aligned}$$

であることが従います．この式を

$$\Phi_A(\lambda) = \left|\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 \quad \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \quad \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3\right|$$

の両辺を λ で微分するのに用いると

$$\frac{d}{d\lambda}\Phi_A(\lambda) = \left|\vec{e}_1 \quad \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \quad \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3\right| + \left|\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \lambda\vec{e}_3 - \vec{a}_3\right| + \left|\lambda\vec{e}_1 - \vec{a}_1 \quad \lambda\vec{e}_2 - \vec{a}_2 \quad \vec{e}_3\right|$$

となります．これから

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{d}{d\lambda}\Phi_A(0) \\
&= \left|\vec{e}_1 \quad -\vec{a}_2 \quad -\vec{a}_3\right| + \left|-\vec{a}_1 \quad \vec{e}_2 \quad -\vec{a}_3\right| + \left|-\vec{a}_1 \quad -\vec{a}_2 \quad \vec{e}_3\right| \\
&= \left|\vec{e}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3\right| + \left|\vec{a}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{a}_3\right| + \left|\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{e}_3\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

であることが分かります.

VII $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$\Phi_{{}^tA}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$\begin{aligned}
\Phi_{{}^tA} &= \left|\lambda I_3 - {}^tA\right| = \left|{}^t(\lambda I_3 - A)\right| \\
&= |\lambda I_3 - A| = \Phi_A(\lambda)
\end{aligned}$$

が成立します.

VIII(IX の準備) $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha \neq \beta$$

を満たすとします．さらに $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, A\vec{q} = \beta\vec{q}$$
$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$$

を満たすならば、

$$\vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$$

が成立することを証明しましょう．

解答

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{0} \tag{4}$$

の両辺に A を掛けると

$$\alpha\vec{p} + \beta\vec{q} = \vec{0} \tag{5}$$

が，β を掛けると

$$\beta\vec{p} + \beta\vec{q} = \vec{0} \tag{6}$$

が従います．(5)−(6) から

$$(\alpha - \beta)\vec{p} = \vec{0}$$

が成立することが分かりますが，$\alpha \neq \beta$ から $\vec{p} = \vec{0}$ が従います．さらにこれを (4) に代入すると $\vec{q} = \vec{0}$ も分かります．

注意　ここでは $A \in M_3(\mathbf{K}), \vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^3$ としていますが

$$A \in M_n(\mathbf{K}), \quad \vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{K}^n$$

でも解答はそのままです．

IX $A \in M_3(\mathbf{K})$ とします．$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

を満たすとします．さらに $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbf{K}^3$ が条件

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, A\vec{q} = \beta\vec{q}, A\vec{r} = \gamma\vec{r}$$
$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$$

を満たすならば、

$$\vec{p} = \vec{q} = \vec{r} = \vec{0}$$

が成立することを証明しましょう．

解答 II に帰着する形で証明します．

$$\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}=\vec{0} \tag{7}$$

の両辺に A を掛けると

$$\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0} \tag{8}$$

が，γ を掛けると

$$\gamma\vec{p}+\gamma\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0} \tag{9}$$

が従います．(8)−(9) から

$$(\alpha-\gamma)\vec{p}+(\beta-\gamma)\vec{q}=\vec{0}$$

が成立することが分かります．ここで

$$\begin{aligned}A\cdot(\alpha-\gamma)\vec{p}=(\alpha-\gamma)A\vec{p}=(\alpha-\gamma)\alpha\vec{p}=\alpha\cdot(\alpha-\gamma)\vec{p}\\A\cdot(\beta-\gamma)\vec{q}=(\beta-\gamma)A\vec{q}=(\beta-\gamma)\beta\vec{q}=\beta\cdot(\beta-\gamma)\vec{q}\end{aligned}$$

がら II が適用できて

$$(\alpha-\gamma)\vec{p}=(\beta-\gamma)\vec{q}=\vec{0}$$

となりますが，$\alpha\neq\gamma$, $\beta\neq\gamma$ から

$$\vec{p}=\vec{q}=\vec{0}$$

が従います．これを (7) に代入すると $\vec{r}=\vec{0}$ であることも分かります．

注意　ここでは $A\in M_3(\mathbf{K})$, $\vec{p},\vec{q},\vec{r}\in\mathbf{K}^3$ としていますが

$$A\in M_n(\mathbf{K}),\quad \vec{p},\vec{q},\vec{r}\in\mathbf{K}^n$$

でも解答はそのままです．

発展問題　$A\in M_n(\mathbf{K})$, $\vec{p}_j\in\mathbf{K}^n$ $(j=1,\ldots,\ell)$ が

$$\vec{p}_1+\cdots+\vec{p}_\ell=\vec{0}$$

$$A\vec{p}_j=\alpha_j\vec{p}_j\quad(j=1,\ldots,\ell)$$

$$\alpha_i\neq\alpha_j\quad(i\neq j)$$

を満たすとします．このとき

$$\vec{p}_1=\cdots=\vec{p}_\ell=\vec{0}$$

が成立することを ℓ に関する帰納法で証明しましょう．