後期 L02 演習問題

I $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ を対角化しましょう.

解答

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

から A の固有値は $\lambda = 2$(重根)$, 8$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\lambda = 2$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y - 2z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります.

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は平行でないですから，$V(2)$ は 2 次元で，$\vec{p_1}, \vec{p_2}$ が基底となります.

(ii) $\lambda = 10$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}z, \quad y = \frac{1}{2}z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります. $||\vec{r_3}|| = 1$ となるように

$$\vec{p_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めます.

　ここで

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

と定めると P は正則行列となります．このことを示すために

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

とします．$V(2) \oplus V(8)$ が一般論から分かりますから

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0},\ c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

が従います．$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$, $\vec{p}_3 \neq \vec{0}$ が成立しますから

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

であることが分かります．よって p が正則であることが分かります．このとき

$$Ap = (A\vec{P}_1\ A\vec{P}_2\ A\vec{P}_3) = (2\vec{P}_1\ 2\vec{P}_2\ 8\vec{P}_3) = (\vec{P}_1\ \vec{P}_2\ \vec{P}_3)\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

から

$$p^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

と対角化されます.

II $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ に対して以下を示しましょう。

(1) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$

(2) $V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) = \mathbf{K}^3$

(3) 各固有空間 $V(\alpha)$ に対して $\mathbf{K}^3$ から $V(\alpha)$ への射影を A で表しましょう。

解答 (1)

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 3 & 7 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda+6 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

と計算されます.

(2)

$$V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) \subset \mathbf{K}^3$$

から

$$\dim(V(-1)\oplus V(1)\oplus V(2))\leq \dim \mathbf{K}^3=3$$

が分かります．さらに

$$\dim V(-1),\dim V(1),\dim V(2)\geq 1$$

から

$$\dim(V(-1)\oplus V(1)\oplus V(2))=\dim V(-1)+\dim V(1)+\dim V(2)\geq 3$$

が成立しますから

$$\dim(V(-1)\oplus V(1)\oplus V(2))=\dim \mathbf{K}^3=3$$

であることが分かります．このとき

$$V(-1)\oplus V(1)\oplus V(2)=\mathbf{K}^3$$

であることが分かります.

(3) $V(-1)$ への射影を P_1, $V(1)$ への射影を P_2, $V(2)$ への射影を P_3 とすると

$$\begin{aligned}
P_1&=\frac{1}{(-1-1)(-1-2)}(A-I)(A-2I)=\frac{1}{6}(A-I)(A-2I)\\
P_2&=\frac{1}{(1-(-1))(1-2)}(A+I)(A-2I)=-\frac{1}{2}(A+I)(A-2I)\\
P_3&=\frac{1}{(2-1)(2-(-1))}(A-I)(A+I)=\frac{1}{6}(A-I)(A+I)
\end{aligned}$$

となります.

III $A=\begin{pmatrix}4&4&-2\\4&4&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$ を対角化しましょう.

解答 まず固有多項式を求めます.

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda)&=\begin{vmatrix}\lambda-4&-4&2\\-4&\lambda-4&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-\lambda&0\\-4&\lambda-4&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&-1&0\\-4&\lambda-4&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}\\
&=\lambda\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda-8&2\\0&4&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)
\end{aligned}$$

から固有値は $\lambda=0$(重根)$,9$ であることが分かります．次に固有ベクトルを求めます.

<u>$\lambda=0$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad 2x+2y-z=0$$

であるので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\2x+2y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\quad(x\neq 0\ \mathrm{OR}\ y\neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

$\underline{\lambda = 9\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 0\\ & & y & + & 2z & = & 0\end{array}\right.$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2z\\-2z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

が固有ベクトルであることが分かります.

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \in V(0),\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in V(0),\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} \in V(9)$$

とすると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となります. 実際

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

とすると $V(0) \oplus V(9)$ と直和であることから

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}, \quad c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

が分かります. $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$ から

$$c_1 = c_2 = 0,\ c_3 = 0$$

が従いますから, P は正則であることが分かります. さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\vec{0}\ \vec{0}\ 9\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$$

と A は対角化されます.

IV $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ とします。

(1) A の固有ベクトルを求めましょう.

(2) A のスペクトル分解を求めましょう. すなわち $\mathbf{K}^3$ を A の固有空間の直和に表しましょう.

(3) (2) で求めたスペクトル分解において各固有空間への射影を A で表しましょう.

解答　(1)

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

から A の固有値はが $\lambda=1$ (重根), 4 であることが分かります．次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda=1\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x+y+z=0$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります．これから

$$\dim V(1) = 2$$

が分かります.

(ii) $\underline{\lambda=4\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x=y=z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0) \tag{10}$$

であることが分かります．これから

$$\dim V(4) = 1$$

が分かります.

(2)

$$V(1) \oplus V(4) \subset \mathbf{R}^3$$

において $\dim(V(1)\oplus V(4)) = \dim V(1) + \dim V(4) = 2+1 = 3$ が成立しますから

$$V(1) \oplus V(4) = \mathbf{R}^3$$

と $\mathbf{R}^3$ が a によってスペクトル分解できることが分かります.

(3) 任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 \in V(1), \quad \vec{v}_2 \in V(4)$$

とスペクトル分解します.

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda - 4}{1 - 4} = -\frac{1}{3}(\lambda - 2)$$

とすると

$$f_1(A)\vec{v} = f_1(A)\vec{v}_1 + f_1(A)\vec{v}_2 = f_1(1)\vec{v}_1 + f_1(2)\vec{v}_2 = 1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

から $V(1)$ への射影は $f_1(A) = -\frac{1}{3}(A - I_3)$ であることが分かります. 他方

$$f_2(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}(\lambda - 1)$$

とすると

$$f_2(A)\vec{v} = f_2(A)\vec{v}_1 + f_2(A)\vec{v}_2 = f_2(1)\vec{v}_1 + f_2(4)\vec{v}_2 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2$$

から $V(4)$ への射影は $f_2(A) = \frac{1}{3}(A - I_3)$ であることが分かります.

V V_1, V_2, V_3 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします.

$$V_i \perp V_j \quad (i \neq j)$$

ならば

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

となることを示しましょう.

解答 $\vec{v}_j \in V_j$ $(j = 1, 2, 3)$ が

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \tag{1}$$

を満たすとします. このとき

$$(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad (i \neq 0)$$

が成立します. (1) の両辺と $\vec{v}_3$ との内積をとると

$$(\vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_3, \vec{v}_1) + (\vec{v}_3, \vec{v}_2) + (\vec{v}_3, \vec{v}_3) = ||\vec{v}_3||^2 = 0$$

となりますから $\vec{v}_3 = \vec{0}$ が従います. (1) に $\vec{v}_3 = \vec{0}$ を代入すると

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0} \tag{2}$$

となりますが, この両辺と $\vec{v}_2$ との内積をとると

$$(\vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{v}_2, \vec{v}_1) + (\vec{v}_2, \vec{v}_2) = ||\vec{v}_2||^2 = 0$$

から $\vec{v}_2 = \vec{0}$ が従います。さらに (2) に $\vec{v}_2 = \vec{0}$ を代入すると $\vec{v}_1 = 0$ が成立します. 以上で

$$\left.\begin{array}{c} \vec{v}_j \in V_j \quad (j = 1, 2, 3) \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{0}$$

を示しましたから

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

が成立することを示しました.

VI V_1, V_2 は $\mathbf{K}^n$ の部分空間とします.

$$V_1 \oplus V_2$$

ならば

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

となることを示しましょう.

解答 $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in V_1$ を V_1 の基底, $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_\ell \in V_2$ を V_2 の基底とします. 任意の $\vec{v} \in V_1 \oplus V_2$ は

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_j \in V_j \ (j = 1, 2)$$

と一意的に表現できます. さらに

$$\vec{v}_1 = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k$$
$$\vec{v}_2 = d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell$$

と $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を基底で表します. すると

$$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k + d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell$$

となりますから, $V_1 \oplus V_2$ が

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_\ell$$

で生成されることが分かります. さらに

$$c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k + d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell = \vec{0}$$

とすると直和であることを用いて

$$c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k = d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell = \vec{0}$$

が従います. さらに $\{\vec{a}_s\}$ が V_1 の基底, $\{\vec{b}_t\}$ が V_2 の基底ですから

$$c_1 = \cdots = c_k = d_1 = \cdots = d_\ell = 0$$

であることが分かります. よって

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_\ell$$

が線型独立であることが分かり, $V_1 \oplus V_2$ の基底であることが証明されました. よって

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = k + \ell = \dim V_1 + \dim V_2$$

が示されました.

VII V_1, V_2, V_3 は $\mathbf{K}^n$ の部分空間とします.

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

ならば

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$$

となることを示しましょう.

解答 $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in V_1$ を V_1 の基底，$\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_\ell \in V_2$ を V_2 の基底，$\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m \in V_3$ を V_3 の基底とします．任意の $\vec{v} \in V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ は

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_j \in V_j \ (j = 1, 2, 3)$$

と一意的に表現できます．さらに

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k \\
\vec{v}_2 &= d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell \\
\vec{v}_3 &= e_1\vec{c}_1 + \ldots + e_m\vec{c}_m
\end{aligned}$$

と $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を基底で表します．すると

$$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k + d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell + e_1\vec{c}_1 + \ldots + e_m\vec{c}_m$$

となりますから，$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ が

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_\ell, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m$$

で生成されることが分かります．さらに

$$c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k + d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell + e_1\vec{c}_1 + \ldots + e_m\vec{c}_m = \vec{0}$$

とすると直和であることを用いて

$$c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k = d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell = e_1\vec{c}_1 + \ldots + e_m\vec{c}_m = \vec{0}$$

が従います．さらに $\{\vec{a}_s\}$ が V_1 の基底，$\{\vec{b}_t\}$ が V_2 の基底，$\{\vec{c}_u\}$ が V_3 の基底ですから

$$c_1 = \cdots = c_k = d_1 = \cdots = d_\ell = e_1 = \cdots = e_m = 0$$

であることが分かります．よって

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_\ell, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m$$

が線型独立であることが分かり，$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ の基底であることが証明されました．よって

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3) = k + \ell + m = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$$

が示されました.

VIII $A \in M_n(\mathbf{K})$ が $A^2 = A$ を満たすとします.
(1) $\mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A)$ が成立することを示しましょう.
(2) $\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(I - A)$ が成立することを示しましょう.
(3) $\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A)$　が成立することを示しましょう.

解答 (1) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n$ が

$$\vec{x} \in \mathrm{Im}(A),\ \vec{y} \in \ker(A),\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$$

を満たすとします．$\vec{z} \in \mathrm{Im}(A)$ であるので $\vec{x} = A\vec{z}$ を満たす $\vec{z} \in \mathbf{K}^n$ が存在しますから

$$A\vec{z} + \vec{y} = \vec{0}$$

となります．この両辺に A を掛けると $\vec{y} \in \ker(A)$ から

$$A^2\vec{z} + \vec{0} = \vec{0}$$

となります．ここで $A^2 = A$ を用いると

$$A\vec{z} = \vec{0} \quad \text{従って} \quad \vec{x} = A\vec{z} = \vec{0}$$

となります．$\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ を仮定していますから $\vec{y} = \vec{0}$ も成立します．以上で

$$\mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A)$$

と直和になることが分かります.
(2) $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ とすると

$$\vec{x} = A\vec{x} + (I - A)\vec{x}$$

から

$$\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(I - A)$$

であることが分かります．この右辺の和が直和であることを示すために，$\vec{x} \in \mathrm{Im}(A)$, $\vec{y} \in \mathrm{Im}(I - A)$ が

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$$

を満たすとします．さらに $\vec{x} = A\vec{x}_0$, $\vec{y} = (I - A)\vec{y}_0$ を満たす $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in \mathbf{K}^n$ が存在しますから

$$A\vec{x}_0 + (I - A)\vec{y}_0 = \vec{0} \tag{\#}$$

が成立します．ここで $A(I - A) = A - A^2 = O_n$ であることに注意しましょう．すると (#) の両辺に A を掛けると

$$A^2\vec{x}_0 + A(I - A)\vec{y}_0 = A^2\vec{x}_0 + O_n\vec{y}_0 = A^2\vec{x}_0 = \vec{0}$$

であることが分かります．$A^2 = A$ ですから

$$\vec{x} = A\vec{x}_0 = A^2\vec{x}_0 = \vec{0} \quad \text{従って} \quad \vec{y} = \vec{0}$$

が分かります．以上で

$$\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(I - A)$$

であることが分かります.

(3) $\vec{y} \in \mathrm{Im}(I - A)$ とします．すると

$$\vec{y} = (I - A)\vec{y}_0$$

を満たす $\vec{y}_0 \in \mathbf{K}^n$ が存在します．この両辺に A を掛けると

$$A\vec{y} = A(I - A)\vec{y}_0 = (A - A^2)\vec{y}_0 = O_n\vec{y}_0 = \vec{0}$$

から $\vec{y} \in \ker(A)$ であることが分かります．従って

$$\mathrm{Im}(I - A) \subset \ker(A)$$

であることが示されました．このことから

$$\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(I - A) \subset \mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A) \subset \mathbf{K}^n$$

となり

$$\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(I - A) = \mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A) = \mathbf{K}^n$$

であることが示されました.