後期 L03 演習問題

I 教科書第 8 章にある

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

によって $\mathbf{K}^3$ を

$$\mathbf{K}^3 = V(-1) \oplus V(0) \oplus V(9)$$

とスペクトル分解します。任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対してこの分解に応じて

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

と分解するとき

$$P_j \vec{v} = v_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

と $P_j \in M_3(\mathbf{K})$ を用いて表されました。このとき

$$P_1 + P_2 + P_3 = I_3,\ P_j^2 = P_j\ (j = 1, 2, 3),\ P_i P_j = O_3\ (i \neq j)$$

が成立することを示しましょう。ただし固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

と因数分解されるときに C-H の定理によって

$$\Phi_A(A) = (A - \alpha_1 I_3)(A - \alpha_2 I_3)(A - \alpha_3 I_3) = O_3$$

が成立することは用いて構いません。また具体的に P_j を求めて示しましょう。

解答

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &:= \frac{(\lambda - 0)(\lambda - 9)}{(-1 - 0)(-1 - 9)} = \frac{1}{10}\lambda(\lambda - 9) \\ f_2(\lambda) &:= \frac{(\lambda - (-1))(\lambda - 9)}{(0 - (-1))(0 - 9)} = -\frac{1}{9}(\lambda + 1)(\lambda - 9) \\ f_3(\lambda) &:= \frac{(\lambda - (-1))(\lambda - 9)}{(9 - (-1))(9 - 0)} = -\frac{1}{9}(\lambda + 1)(\lambda - 9) \end{aligned}$$

と定義します．このとき

$$\begin{aligned} &f_1(-1) = 1, \quad f_1(0) = 0, \quad f_1(9) = 0 \\ &f_2(-1) = 0, \quad f_2(0) = 1, \quad f_2(9) = 0 \\ &f_3(-1) = 0, \quad f_3(0) = 0, \quad f_3(9) = 1 \end{aligned}$$

が成立します．一般に $A \in M_3(\mathbf{K})$, $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$, $\alpha \in \mathbf{K}$ が

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v}$$

を満たすならば，$g(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ に対して

$$g(A)\vec{v} = g(\alpha)\vec{v}$$

が成立します．そこで $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(-1),\ \vec{v}_2 \in V(0),\ \vec{v}_3 \in V(3) \tag{1}$$

とスペクトル分解をすると

$$\begin{aligned}
f_1(A)\vec{v} &= f_1(A)\vec{v}_1 + f_1(A)\vec{v}_2 + f_1(A)\vec{v}_3 f_1(-1)\vec{v}_1 + f_1(0)\vec{v}_2 + f_1(9)\vec{v}_3 = \vec{v}_1\\
f_2(A)\vec{v} &= f_2(A)\vec{v}_1 + f_2(A)\vec{v}_2 + f_2(A)\vec{v}_3 f_2(-1)\vec{v}_1 + f_2(0)\vec{v}_2 + f_2(9)\vec{v}_3 = \vec{v}_2\\
f_3(A)\vec{v} &= f_3(A)\vec{v}_1 + f_3(A)\vec{v}_2 + f_3(A)\vec{v}_3 f_3(-1)\vec{v}_1 + f_3(0)\vec{v}_2 + f_3(9)\vec{v}_3 = \vec{v}_3
\end{aligned}$$

が成立しますから

$$P_1 = f_1(A), \quad P_2 = f_2()A), \quad P_3 = f_3(A)$$

であることが分かります．

次に

$$f_1(\lambda) + f_2(\lambda) + f_3(\lambda) = 1$$

が恒等的に成立することに注意します．両辺が 2 次式以下で $\lambda = -1, 0, 9$ で成立するからです．これから

$$P_1 + P_2 + P_3 = I_3 \tag{2}$$

が従います．(2) 自体は分解 (1) に

$$\vec{v}_1 = P_1\vec{v}, \quad \vec{v}_2 = P_2\vec{v}, \quad \vec{v}_3 = P_3\vec{v}$$

を代入して

$$\vec{v} = P_1\vec{v} + P_2\vec{v} + P_3\vec{v} = (P_1 + P_2 + P_3)\,\vec{v}$$

を導いて示すこともできます．次に

$$P_iP_j = O_3 \quad (i \neq J) \tag{3}$$

が成立することを $P_1P_2 = O_3$ で示しましょう．

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda) = -\frac{1}{90}(\lambda+1)\lambda(\lambda-9)^2 = -\frac{1}{90}(\lambda-9)\Phi_A(\lambda)$$

となりますから

$$P_1P_2 = P_2P_1 = -\frac{1}{90}(A-9I_3)\Phi_A(A) = -\frac{1}{90}(A-9I_3)O_3 = O_3$$

が従います．ここで Cayley-Hamilton の定理

$$\Phi_A(A) = (A+I_3)A(A-9I_3) = O_3$$

が成立することを用いました．次に

$$P_i^2 = P_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

を示します．$i = 1$ のとき

$$P_1 = P_1(P_1 + P_2 + P_3) = P_1^2 + P_1P_2 + P_1P_3 = P_1^2 + O_3 + O_3 = P_1^2$$

となりますが，$i=2,3$ の場合も同様です．
補足 任意の $\vec{v}\in\mathbf{K}^3$ を

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3,\quad \vec{v}_1\in V(-1),\ \vec{v}_2\in V(0),\ \vec{v}_3\in V(9)$$

とスペクトル分解します．このとき $\vec{v}_1$ をスペクトル分解すると

$$\vec{v}_1=\vec{v}_1+\vec{0}+\vec{0},\quad \vec{v}_1\in V(-1),\ \vec{0}\in V(0),\ \vec{0}\in V(9)$$

となります．$\vec{v}_1=P_1\vec{v}$, $P_1\vec{v}_1=\vec{v}_1$, $P_2\vec{v}_1=\vec{0}$ であることに注意すると

$$P_1^2\vec{v}_1=P_1\vec{v}_1,\quad P_2P_1\vec{v}=\vec{0}$$

であることが分かりますから

$$P_1^2=P_1,\quad P_1P_2=O_3$$

が従います．

II $A=\begin{pmatrix}15&-5&-6\\5&-2&-3\\27&-9&-10\end{pmatrix}$ とします。以下では

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

であることを用いても構いません．A が対角化できないことを示しましょう．

解答 解答 1

$$(A+I_3)(A-2I_3)=\begin{pmatrix}16&-5&-6\\5&-1&-3\\27&-9&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13&-5&-6\\5&-4&-3\\27&-9&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&*&*\\ *&38&*\\ *&*&*\end{pmatrix}\neq O_3$$

から A が対角化可能でないことが分かります．
解答 2 $\dim V(-1)\geq 2$ とすると $(\lambda+1)^2|\Phi_A(\lambda)$ となりますから，あり得ません．従って

$$\dim V(-1)=1$$

であることが分かります．さらに

$$A-2I_3=\begin{pmatrix}13&-5&-6\\5&-4&-3\\27&-9&-12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}13&-5&-6\\5&-4&-3\\1&1&0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

から $\dim V(2)=1$ が分かります．以上から

$$\dim(V(-1)\oplus V(2))=2$$

となりますから

$$V(-1)\oplus V(2)\subsetneq\mathbf{K}^3$$

となります．従って A は対角化可能ではありません．

III $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ とします。Cayley-Hamilton の定理を用いて B^{-1} を計算しましょう.

解答 まず B の固有多項式を求めます.

$$\begin{aligned}
\Phi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & 4-\lambda \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-3) \\
&= \lambda^3 - 9\lambda + 26\lambda - 24
\end{aligned}$$

から Cayley-Hamilton の定理によって

$$B^3 - 9B^2 + 26B - 24I_3 = O_3$$

であることが分かります. 両辺に B^{-1} を掛けると

$$B^{-1} = \frac{1}{24}(B^2 - 9B + 26I_3)$$

が従います.

VI $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ とします。

(1) A の固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

であることを示しましょう。

(2) 直和分解

$$\mathbf{K}^3 = V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$$

において $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

と直和分解（スペクトル分解）するとき

$$f_i(A)\vec{v} = \vec{v}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

となる多項式 $f_i(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ を求めましょう。

(3) (2) を用いて B^n を B^2, B, I_3 で表しましょう。

解答 (1)

$$\begin{aligned}
\Phi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda) &= \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda-3) \\
f_2(\lambda) &= \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{(2-1)(2-3)} = -(\lambda-1)(\lambda-3) \\
f_3(\lambda) &= \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)
\end{aligned}$$

(3) $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_j \in V(j)\ (j = 1, 2, 3)$$

とスペクトル分解します．すると

$$\begin{aligned}
B^n\vec{v} &= 1^n\vec{v}_1 + 2^n\vec{v}_2 + 3^n\vec{v}_3 \\
&= \left\{\frac{1}{2}(B-2I_3)(B-3I_3) - 2^n(B-I_3)(B-3I_3) + \frac{3^n}{2}(B-I_3)(B-2I_3)\right\}\vec{v}
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
B^n &= \frac{1}{2}(B-2I_3)(B-3I_3) - 2^n(B-I_3)(B-3I_3) + \frac{3^n}{2}(B-I_3)(B-2I_3) \\
&= \left(\frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2}\right)B^2 - \left(\frac{5}{2} - 4\cdot 2^n + \frac{3}{2}3^n\right)B + (3 - 3\cdot 2^n + 3^n)\,I_3
\end{aligned}$$

であることが分かります．

V $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbf{R}$ とします。

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

に対して

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$$

が成立することを示しましょう。

解答略

VI $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ が対角化可能であることを示して、$\mathbf{K}^3$ をスペクトル分解しましょう（固有空間の直和で表す)。さらに各固有空間への射影を A で表わしましょう.

解答

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -6 \\ -3 & \lambda-1 & -6 \\ 3 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 \\ 3 & \lambda+5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2) \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

から A の固有多項式の根はすべて単純であることが分かります. これから A は対角化可能であることが従います. よって

$$\mathbf{R}^3 = V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)$$

であることが分かります. $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_{-1} + \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ \vec{v}_{-1} \in V(-1),\ \vec{v}_1 \in V(1),\ \vec{v}_2 \in V(2)$$

とスペクトル分解すると

$$\begin{aligned} f_{-1}(\lambda) &= \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(\lambda-1)(\lambda-2) \\ f_1(\lambda) &= \frac{(\lambda+1)(\lambda-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2) \\ f_2(\lambda) &= \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(\lambda+1)(\lambda-1) \end{aligned}$$

によって

$$\begin{aligned} \vec{v}_{-1} &= f_{-1}(A)\vec{v} \\ \vec{v}_1 &= f_1(A)\vec{v} \\ \vec{v}_2 &= f_2(A)\vec{v} \end{aligned}$$

と表せます.

VII $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とします。Cayley-Hamilton の定理を用いて A^n を計算しましょう.

解答 まず A の固有多項式を計算します.

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-9 & -2 & 4 \\ 4 & \lambda-3 & -4 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-5 & \lambda-5 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & -4 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & -4 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-7 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)$$

となります. λ^n を $\Phi_A(\lambda)$ で割ることを考えます.

$$\lambda^n = q(\lambda)\Phi_A(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

とすると

$$\begin{cases} 3^2a &+& 3b &+& c &=& 3^n \\ 5^2a &+& 5b &+& c &=& 5^n \\ 7^2 &+& 7b &+& c &=& 7^n \end{cases}$$

が成立します.

$$B = \begin{pmatrix} 3^2 & 3 & 1 \\ 5^2 & 5 & 1 \\ 7^2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ \frac{35}{8} & -\frac{21}{4} & \frac{1}{5}8 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{8} \cdot 3^n - \frac{1}{4} \cdot 5^n + \frac{1}{8} \cdot 5^n \\ b &= -\frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{5}{2} \cdot 5^n - 5^n \\ c &= \frac{35}{8} \cdot 3^n - \frac{21}{4} \cdot 5^n + \frac{15}{8} \cdot 5^n \end{aligned}$$

であることが分かります. このとき

$$A^n = \left(\frac{1}{8} \cdot 3^n - \frac{1}{4} \cdot 5^n + \frac{1}{8} \cdot 5^n\right) A^2 + \left(-\frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{5}{2} \cdot 5^n - 5^n\right) A + \left(\frac{35}{8} \cdot 3^n - \frac{21}{4} \cdot 5^n + \frac{15}{8} \cdot 5^n\right) I_3$$

であることが分かります.

VIII $A \in M_3(\mathbf{C})$ が $\det(A) \neq 0$ を満たします.

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

のとき $\Phi_{A^{-1}}(\lambda)$ を求めましょう.

解答 正則な $P \in M_3(\mathbf{C})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

と三角化します. 両辺の行列式を考えると

$$|A| = |P^{-1}AP| = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$$

であることが分かります．他方

$$\left(P^{-1}A^{-1}P\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

となります．この右辺を

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & x & y \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & z \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix}$$

として求めます．実際

$$P^{-1}AP \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & x & y \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & z \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}a & y\alpha_1 + az + \frac{1}{\alpha_3}b \\ 0 & 1 & z\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$x = -\frac{a}{\alpha_1\alpha_2},\ z = -\frac{c}{\alpha_2\alpha_3},\ y = -\frac{1}{\alpha_1}\left(az + \frac{1}{\alpha_3}b\right)$$

とすると

$$B = \left(P^{-1}AP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

であることが分かります．このことから

$$\begin{aligned} \Phi_{A^{-1}}(\lambda) &= \Phi_{P^{-1}A^{-1}P}(\lambda) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\alpha_1} & * & * \\ 0 & \lambda - \frac{1}{\alpha_2} & * \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{1}{\alpha_2} \end{vmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\lambda - \frac{1}{\alpha_2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{\alpha_3}\right) \end{aligned}$$

であることが分かります．

IX $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ とします．$A \in M_3(\mathbf{K})$ があって

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{K}$ に対して満たします．このとき

$$\Phi_{f(A)}(\lambda)$$

を求めましょう．

解答 正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

と三角化します．このとき帰納法によって

$$P^{-1}A^{\ell}P = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\ell} & a & b \\ 0 & \alpha_2^{\ell} & c \\ 0 & 0 & \alpha_3^{\ell} \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

$$f(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

とすると

$$\begin{aligned} P^{-1}f(A)P &= f(P^{-1}AP) \\ &= a_m \begin{pmatrix} \alpha_1^m & * & * \\ 0 & \alpha_2^m & * \\ 0 & 0 & \alpha_3^m \end{pmatrix} + a_{m-1} \begin{pmatrix} \alpha_1^{m-1} & * & * \\ 0 & \alpha_2^{m-1} & * \\ 0 & 0 & \alpha_3^{m-1} \end{pmatrix} + \cdots + a_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} + a_0 I_3 \\ &= \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & * & * \\ 0 & f(\alpha_2) & * \\ 0 & 0 & f(\alpha_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります．従って

$$\begin{aligned} \Phi_{f(A)}(\lambda) = \Phi_{P^{-1}f(A)P}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - f(\alpha_1) & * & * \\ 0 & \lambda - f(\alpha_2) & * \\ 0 & 0 & \lambda - f(\alpha_3) \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - f(\alpha_1))(\lambda - f(\alpha_2))(\lambda - f(\alpha_3)) \end{aligned}$$

であることが分かります.