後期 L04 演習問題

I 以下の対称行列 A を直交行列で対角化して A が定める 2 次形式を対応する直交座標変換で簡単にしましょう.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **(5)** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ -4 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

から A の固有値は $\lambda = 2$(重根), 8 であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\lambda = 2$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y - 2z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります．ここで平行でない

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を正規直交化します．まず $\vec{p}_1$ を正規化して

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{||\vec{p}_1||}\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定めます．さらに $\vec{p}_2$ の $\vec{p}_1$ 方向への直交射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{p}_2, \vec{p}_1)}{||\vec{p}_1||^2}\vec{p}_1 = \frac{2}{2}\vec{p}_1 = \vec{p}_1$$

となりますから，$\vec{r}_1$ に垂直なベクトルである $\vec{p}_2 - \vec{w}$ は

$$\vec{p}_2 - \vec{w} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と求められます．これを正規化して

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{||\vec{p}_2 - \vec{p}_2||}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$||\vec{r}_1|| = ||\vec{r}_2|| = 1, \quad (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

が分かります．これが $V(2)$ の正規直交基底となります．

(ii)$\underline{\lambda = 10 \text{ のとき}}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}z, \quad y = \frac{1}{2}z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．$||\vec{r}_3|| = 1$ となるように

$$\vec{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると，一般論から $V(2) \perp V(8)$ であることが分かりますから

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

が従います．よって $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2 \ A\vec{r}_3) = (2\vec{r}_1 \ 2\vec{r}_2 \ 8\vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3) \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \left({}^tRA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tR \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \left({}^tRAR \cdot {}^tR \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tR \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right) = 2\xi^2 + 2\eta^2 + 8\eta^2$$

と変換されます.

(2)

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -4 & 2\\ -4 & \lambda-5 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ -4 & \lambda-5 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -4 & \lambda-5 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-9 & 2\\ 0 & 4 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-9 & 2\\ 4 & \lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

から A の固有値は $\lambda=1$(重根), 10 であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda=1\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\-4&-4&2\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2x+2y-z=0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\2x+2y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\quad(x\neq 0\text{ OR }y\neq 0)$$

となります．ここで平行でない

$$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad\vec{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

を正規直交化します．まず $\vec{p}_1$ を正規化して

$$\vec{r}_1=\frac{1}{||\vec{p}_1||}\vec{p}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

と定めます．さらに $\vec{p}_2$ の $\vec{p}_1$ 方向への直交射影は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{p}_2,\vec{p}_1)}{||\vec{p}_1||^2}\vec{p}_1=\frac{4}{5}\vec{p}_1$$

となりますから，$\vec{r}_1$ に垂直なベクトルである $\vec{p}_2-\vec{w}$ は

$$\vec{p}_2-\vec{w}=\vec{p}_2-\frac{4}{5}\vec{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\5\\2\end{pmatrix}$$

と求められます．これを正規化して

$$\vec{r}_2=\frac{1}{||\vec{p}_2-\vec{p}_2||}(\vec{p}_2-\vec{p}_1)=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-4\\5\\2\end{pmatrix}$$

と定めると

$$||\vec{r}_1||=||\vec{r}_2||=1,\quad(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=0$$

が分かります．これが $V(1)$ の正規直交基底となります．

(ii)$\underline{\lambda = 8\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow x = -2z, \quad y = -2z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2z\\-2z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．$||\vec{r}_3|| = 1$ となるように

$$\vec{r}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

と定めると，一般論から $V(1) \perp V(10)$ であることが分かりますから

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

が従います．よって $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2\ A\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ 10\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \left({}^tRA\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \left({}^tRAR\cdot{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\right) = \xi^2 + \eta^2 + 10\eta^2$$

と変換されます．

(3)

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & 1\\1 & \lambda-1 & 1\\1 & 1 & \lambda-3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & 4-\lambda\\1 & \lambda-1 & 1\\1 & 1 & \lambda-3\end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\1 & \lambda-1 & 1\\1 & 1 & \lambda-3\end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\0 & \lambda-1 & 2\\0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\1 & \lambda-2\end{vmatrix}$$
$$= \lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$$

から A の固有値は $\lambda = 0, 3, 4$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = 0 \text{ のとき}}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x - z = 0, \quad y - 2z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．特に $||\vec{r}_1|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(ii) $\underline{\lambda = 3 \text{ のとき}}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow x - z = 0, \quad y + z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．特に $||\vec{r}_2|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(iii) $\underline{\lambda = 4 \text{ のとき}}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow x + z = 0, \quad y = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．特に $||\vec{r}_3||=1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

とします．

一般論から

$$V(0)\perp V(3),\quad V(0)\perp V(4),\quad V(3)\perp V(4)$$

であることが分かりますから

$$(\vec{r}_i,\vec{r}_j)=0\quad(i\neq j)$$

が従います．さらに

$$||\vec{r}_j||=1\quad(j=1,2,3)$$

と $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ を選んでいます．よって $R=(\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR=(A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2\ A\vec{r}_3)=(0\vec{r}_1\ 3\vec{r}_2\ 4\vec{r}_3)=(\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&4\end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)&=\left({}^tRA\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\left({}^tRAR\cdot{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\\&=\left(\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\right)=3\eta^2+4\eta^2\end{aligned}$$

と変換されます．

(4)

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda)&=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&-2\\1&\lambda-6&1\\-2&1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1-\lambda\\1&\lambda-6&1\\-2&1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&\lambda-6&1\\-2&1&\lambda-3\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&\lambda-6&2\\0&1&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}0&\lambda-6&2\\0&1&\lambda-5\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-7)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda=1,4,7$ であることが分かります．

次に固有ベクトルを求めます．

(i) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -5 & 1\\-2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x + z = 0, \quad y = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．特に $||\vec{r}_1|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

とします．

(ii) $\underline{\lambda = 4 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & -2 & 2\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow x - z = 0, \quad y - z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．特に $||\vec{r}_2|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

とします．

(iii) $\underline{\lambda = 7 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow x - z = 0, \quad y + 2z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．特に $||\vec{r}_3|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

とします.

一般論から

$$V(1) \perp V(4), \quad V(1) \perp V(7), \quad V(4) \perp V(7)$$

であることが分かりますから

$$(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が従います．さらに

$$||\vec{r}_j|| = 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

と $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ を選んでいます．よって $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2\ A\vec{r}_3) = (1\vec{r}_1\ 4\vec{r}_2\ 7\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned} \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= \left({}^tRA\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \left({}^tRAR\cdot{}^tR\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}\right) = \xi^2 + 4\eta^2 + 7\eta^2 \end{aligned}$$

と変換されます.

(5)

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ 0 & \lambda-5 & \lambda-5 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

から A の固有値は $\lambda = 5$(重根), -4 であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\lambda = 5$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y - 2z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y+2z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\quad(y\neq 0\text{ OR }z\neq 0)$$

となります．ここで平行でない

$$\vec{p_1}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{p_2}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

を正規直交化します．まず $\vec{p_1}$ を正規化して

$$\vec{r_1}=\frac{1}{||\vec{p_1}||}\vec{p_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

と定めます．さらに $\vec{p_2}$ の $\vec{p_1}$ 方向への直交射影は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{p_2},\vec{p_1})}{||\vec{p_1}||^2}\vec{p_1}=-\frac{4}{5}\vec{p_1}$$

となりますから，$\vec{r_1}$ に垂直なベクトルである $\vec{p_2}-\vec{w}$ は

$$\vec{p_2}-\vec{w}=\vec{p_2}+\frac{4}{5}\vec{p_1}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$$

と求められます．これを正規化して

$$\vec{r_2}=\frac{1}{||\vec{p_2}-\vec{p_2}||}(\vec{p_2}-\vec{p_1})=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$$

と定めると

$$||\vec{r_1}||=||\vec{r_2}||=1,\quad(\vec{r_1},\vec{r_2})=0$$

が分かります．これが $V(5)$ の正規直交基底となります．

(ii)<u>$\lambda=-4$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-8&0&-4\\0&1&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}z=0,\quad y+z=0$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\-z\\z\end{pmatrix}=\frac{z}{2}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\quad(z\neq 0)$$

となります．$||\vec{r_3}||=1$ となるように

$$\vec{r_3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

と定めると，一般論から $V(5) \perp V(-4)$ であることが分かりますから

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

が従います．よって $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2\ A\vec{r}_3) = (5\vec{r}_1\ 5\vec{r}_2\ \ -4\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned} \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= \left({}^tRA\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \left({}^tRAR\cdot {}^tR\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}\right) = 5\xi^2 + 5\eta^2 - 4\eta^2 \end{aligned}$$

と変換されます.

II $P \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^n) \tag{1}$$

と

$$||P\vec{v}|| = ||\vec{v}|| \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^n) \tag{2}$$

が必要十分であることを証明しましょう。

解答 (1)⇒(2)

(1) において $\vec{w} = \vec{v}$ の場合を考えると

$$||P\vec{v}||^2 = ||\vec{v}||^2$$

となりますから，(2) が従います.

(2)⇒(1) $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{4}\left(||\vec{v}+\vec{w}||^2 - ||\vec{v}-\vec{w}||^2\right)$$

が成立することを用います．実際

$$\begin{aligned} (P\vec{v}, P\vec{w}) &= \frac{1}{4}\left(||P\vec{v}+P\vec{w}||^2 - ||P\vec{v}-P\vec{w}||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||P(\vec{v}+\vec{w})||^2 - ||P(\vec{v}-\vec{w})||^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||\vec{v}+\vec{w}||^2 - ||\vec{v}-\vec{w}||^2\right) = (\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

と (2) から (1) を導くことができます.

III 3 次の直交行列の全体を $O(3)$ とします．$P_1, P_2 \in O(3)$ ならば $P_1P_2 \in O(3)$, ${}^tP_1 \in O(3)$ であることを示しましょう

解答

$$
\begin{aligned}
(P_1P_2)\,P_1P_2 &= {}^tP_2\,{}^tP_1P_1P_2 \\
&= {}^tP_2I_3P_2 = {}^tP_2P_2 = I_3 \\
P_1P_2\,(P_1P_2) &= P_1P_2{}^tP_2\,{}^tP_1 \\
&= P_1I_3{}^tP_1 = P_1{}^tP_1 = I_3
\end{aligned}
$$

から P_1P_2 が直交行列であることが分かります．他方

$$
\begin{aligned}
{}^t\left({}^tP_1\right)\,{}^tP_1 = P_1\,{}^tP_1 = I_3 \\
{}^tP_1{}^t\left({}^tP_1\right) = {}^tP_1P_1 = I_3
\end{aligned}
$$

から ${}^tP_1$ が直交行列であることが分かります.

IV $A \in M_3(\mathbf{R})$ は対称とします。A が定める 2 次形式は正定値、すなわち

$$(A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

が成立するとします。
(1) A が正則であることを示しましょう。
(2) A^{-1} が対称であることを示しましょう。
(3) A^{-1} が定める 2 次形式が正定値であること、すなわち

$$(A^{-1}\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

であることを示しましょう。

解答 (1)（解 1）

$A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して (i) A は正則 $\Leftrightarrow$ (ii) $\left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}\right)$ $\Leftrightarrow$ (iii) $\det(A) \neq 0$

が成立することを用います．A が正則でないとするとある $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ が

$$A\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

が成立しますが,

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

となりますが，これは A が定める 2 次形式が正定値であることに反します．よって A は正則であることが分かります.

（解 2）

対称な $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned}\text{(i)}(A\vec{v},\vec{v})>0 \quad (\vec{v}\neq\vec{0}) &\Leftrightarrow \text{(ii)}A\text{の固有値}\alpha,\beta,\gamma>0\\ &\Leftrightarrow \text{(iii)}a_{11}>0,\ \det(A_2)>0,\ \det(A)>0\end{aligned}$$

が成立します．ただし $A=\left(\begin{smallmatrix} a & p & q\\ p & b & r\\ q & r & c\end{smallmatrix}\right)$ に対して $A_2=\left(\begin{smallmatrix} a & p\\ p & b\end{smallmatrix}\right)$ と定めています．

これを用いると $\det(A)>0$ から A が正則であることが分かります．

(2)

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_3$$

の各辺の転置行列を考えると

$${}^t\left(A^{-1}\right){}^tA={}^tA^t\left(A^{-1}\right)=I_3$$

が成立します．A が対称ですから

$${}^t\left(A^{-1}\right)A=A^t\left(A^{-1}\right)=I_3$$

となりますが，逆行列の一意性から

$$A^{-1}={}^t\left(A^{-1}\right)$$

が導かれます．従って A^{-1} が対称であることが分かります．

(3)（解 1） 任意の $\vec{x}\in\mathbf{R}^3$ が $\vec{x}\neq\vec{0}$ を満たすとします．このとき $\vec{y}=A^{-1}\vec{x}$ に対して $\vec{y}\neq\vec{0}$ が成立します．ここで

$$(A^{-1}\vec{x},\vec{x})=(\vec{y},A\vec{y})>0$$

となりますから A^{-1} が正定値な 2 次形式を定めることが分かります．

（解 2） A を直交行列で

$${}^tPAP=\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}$$

と対角化します．このとき両辺の逆行列は

$${}^tPA^{-1}P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha} & & \\ & \frac{1}{\beta} & \\ & & \frac{1}{\gamma}\end{pmatrix}$$

となります．これから A^{-1} の固有値は

$$\Phi_{A^{-1}}(\lambda)=\Phi_{{}^tPA^{-1}P}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{\alpha} & & \\ & \lambda-\frac{1}{\beta} & \\ & & \lambda-\frac{1}{\gamma}\end{vmatrix}=\left(\lambda-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda-\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda-\frac{1}{\gamma}\right)$$

から $A=\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}>0$ となります．このことから A^{-1} が定める 2 次形式が正定値であることが従います．

V $A \in M_{m,3}(\mathbf{R})$ とします。すなわち A が $m \times 3$ 型の行列とします。$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ と列ベクトル表示をします。また $B = {}^tAA$ と定めます。
(1) B が非負定値であること、すなわち

$$(B\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^3)$$

が成立することを示しましょう。
(2) B が正定値であることと $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が線型独立であることが必要十分であることを示しましょう。

解答 (1)

$$(B\vec{v}, \vec{v}) = ({}^tA\vec{v}, \vec{v}) = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ||A\vec{v}||2 \geq 0 \tag{11}$$

から B が定める 2 次形式が非負定値であることが分かります.

(2) B が定める 2 次形式が正定値であるとします. このとき (11) において $\vec{v} \neq \vec{0}$ ならば $||A\vec{v}||^2 \neq 0$ 従って

$$A\vec{v} \neq \vec{0} \quad \text{すなわち} \quad v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}\ \not{\vec{0}}$$

が分かります. これは対偶をとると

$$v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}\vec{0} \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

となりますから $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立であることを意味します.

逆に $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立であると仮定します. これは

$$\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow A\vec{v} \neq \vec{0}$$

と必要十分です. これから

$$\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow 0 < ||A\vec{v}||^2 = (B\vec{v}, \vec{v})$$

が従います.

VII $B \in M_3(\mathbf{R})$ は対称とします。
(1) B が非負定値であることと B の固有値 α, β, γ が

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

であることが必要十分であることを示しましょう。
(2) B が非負定値であるとき B が正定値であることと $\det(B) > 0$ が必要十分であることを示しましょう.

解答　(1)
B が非負定値の 2 次形式を定めるとします. B を直交行列 P で

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \tag{12}$$

と対角化します. このとき

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \quad A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

となりますが

$$0 \leq (B\vec{p}_1, \vec{p}_1) = (\alpha\vec{p}_1, \vec{p}_1) = \alpha \cdot ||\vec{p}_1||^2 = \alpha$$

から $\alpha \geq 0$ が分かります. 同様に $\beta, \gamma \geq 0$ も分かります.
逆に, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ とします. 上で考えた B の直交行列による対角化を用います. すなわち P が定める直交座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ を用いると

$$\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 \geq 0$$

となりますから, B が定める 2 次形式は非負定値であることが分かります.
(2)
B が定める 2 次形式が正定値であると仮定します. このとき, B の固有値は $\alpha, \beta, \gamma > 0$ となります. このとき (12) の行列式を考えると

$$\det(B) = \det({}^tPBP) = \alpha\beta\gamma > 0$$

となります.
逆に $\det(B) > 0$ と仮定します. このとき

$$\alpha\beta\gamma = \det(B) > 0$$

から

$$\alpha, \beta, \gamma \neq 0$$

が分かります. B が非負定値の 2 次形式を定めることを前提としていますから,

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

が成立しています. 以上を合わせて

$$\alpha, \beta, \gamma > 0$$

が従います.