後期 L05 演習問題

I (1) $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{R}^n$ が正規直交系であることと ${}^tPP = I_3$ を満たすこととが必要十分であることを示しましょう．

(2) $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{R}^n$ が正規直交系であるとします．3 次正方行列 R に対して

$$(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)R$$

として $\vec{q}_j \in \mathbf{R}^n$ $(j = 1, 2, 3)$ を定めると

$$R \text{ が直交行列} \ \Leftrightarrow\ \vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \text{ が正規直交系}$$

であることを示しましょう．

解答 (1)

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||\vec{p}_1|| & (\vec{p}_1, \vec{p}_2) & (\vec{p}_1, \vec{p}_3) \\ (\vec{p}_2, \vec{p}_1) & ||\vec{p}_2|| & (\vec{p}_2, \vec{p}_3) \\ (\vec{p}_3, \vec{p}_1) & (\vec{p}_3, \vec{p}_2) & ||\vec{p}_3|| \end{pmatrix} $$

から

$$\begin{aligned} {}^tPP = I_3 \quad &\Leftrightarrow \quad (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3 \text{は正規直交系である} \end{aligned}$$

ことが分かります.

(2) $Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$ とすると

$$ {}^tQQ = {}^tR\,{}^tPPR = {}^tRR $$

であることが分かります．このとき

$$\begin{aligned} \vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \text{が正規直交系である} \Leftrightarrow &\quad {}^tQQ = I_3 \\ \Leftrightarrow &\quad {}^tRR = I_3 \\ \Leftrightarrow &\quad R\text{は直行行列である} \end{aligned}$$

ことが分かります.

II **(1)** $\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & p & q\\ 0 & r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & 0 & 0\\ 0 & x & y\\ 0 & z & w\end{pmatrix}$ を計算して $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して $\left(\begin{array}{c|c}\alpha & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & A\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\beta & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & B\end{array}\right)$ を求めましょう.

(2) ${}^t\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & p & q\\ 0 & r & s\end{pmatrix}$ を計算して $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して ${}^t\left(\begin{array}{c|c}\alpha & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & A\end{array}\right)$ を求めましょう.

(3) 2 次正方行列 $R \in M_2(\mathbf{R}$ が回転行列（より一般には直交行列）とします. このとき $\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & R\end{array}\right)$ が直交行列であることを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & p & q\\ 0 & r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & 0 & 0\\ 0 & x & y\\ 0 & z & w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\beta & 0 & 0\\ 0 & px+qz & py+qw\\ 0 & rx+sz & ry+sw\end{pmatrix}$$

から

$$\left(\begin{array}{c|c}\alpha & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & A\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\beta & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & B\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}\alpha & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & A\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}\alpha\beta & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & AB\end{array}\right)$$

であることが分かります.

(2)

$${}^t\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & p & q\\ 0 & r & s\end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & p & r\\ 0 & q & s\end{pmatrix}$$

から

$$\left(\begin{array}{c|c}\alpha & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & A\end{array}\right) = {}^t\left(\begin{array}{c|c}\alpha & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & {}^tA\end{array}\right)$$

であることが分かります.

(3)

$$\begin{aligned}{}^t\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & R\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & R\end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c}1 & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & {}^tR\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & R\end{array}\right)\\ &= \left(\begin{array}{c|c}1 & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & {}^tRR\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}1 & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & I_2\end{array}\right) = I_3\end{aligned}$$

から $\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\ \ 0\\ \hline \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & R\end{array}\right)$ が直交行列であることが分かります.

III $A \in M_3(\mathbf{R})$ が対称とします.

(1) $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$, $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ならば $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ が $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3$, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して成立することを示しましょう.

(2) $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \in \mathbf{R}^3$ が正規直交系とします. $A\vec{q}_1 = \alpha\vec{q}_1$ が成立するとき

$$A(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

と $a, b, c \in \mathbf{R}$ を用いて表されることを示しましょう.

解答 (1)

$$(\vec{v}, A\vec{w}) = ({}^tA\vec{v}, \vec{w}) = (A\vec{v}, \vec{w}) = (\alpha\vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

(2) $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ が $\mathbf{R}^3$ の基底ですから

$$A\vec{q}_2 = f_1\vec{q}_1 + f_2\vec{q}_2 + f_3\vec{q}_3, \quad A\vec{q}_3 = g_1\vec{q}_1 + g_2\vec{q}_2 + g_3\vec{q}_3$$

さらに (1) から

$$0 = (A\vec{q}_2, \vec{q}_1) = f_1, \quad 0 = (A\vec{q}_3, \vec{q}_1) = g_1$$

であることが分かります. さらに A が対称ですから

$$(A\vec{q}_2, \vec{q}_3) = (\vec{q}_2, A\vec{q}_3)$$

から

$$f_3 = g_2$$

が分かります. ここで $f_2 = a, f_3 = g_2 = c, g_3 = b$ とすると

$$A(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

IV $A \in M_3(\mathbf{R})$ が対称とします.

(1)

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \geq 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3\right) \Leftrightarrow A\text{の固有値}\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

であることを示しましょう.

(2)

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \geq 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3\right)$$

ならば

$$a_{11}, a_{22}, a_{33} \geq 0, \quad |A_2| \geq 0, \quad |A| \geq 0$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1) 直交行列 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ が存在して

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

が成立して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

と直交座標変換をすると

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2$$

が成立します.

<u>$(\Rightarrow)$</u>

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \quad A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

から

$$0 \leq (A\vec{p}_1, \vec{p}_1) = \alpha, \quad 0 \leq (A\vec{p}_2, \vec{p}_2) = \beta, \quad 0 \leq (A\vec{p}_3, \vec{p}_3) = \gamma$$

<u>$(\Leftarrow)$</u>

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 \geq 0$$

が $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ から成立します.

(2)

$$0 \leq (A\vec{e}_1, \vec{e}_1) = a_{11}, \quad 0 \leq (A\vec{e}_2, \vec{e}_2) = a_{22}, \quad 0 \leq (A\vec{e}_3, \vec{e}_3) = a_{33}$$

次に対称な $B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned} (B\vec{v}, \vec{v}) \geq 0 \Leftrightarrow B\text{の固有値}\alpha, \beta \geq 0 \\ a, b \geq 0,\ |B| \geq 0 \end{aligned}$$

であることを用います. $A = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}$ とすると

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

となります. このとき $|A_2| \geq 0$ が従います.

　最後に A の固有値 $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

が成立しますから,

$$|A| = |P^{-1}AP| = \begin{vmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \geq 0$$

が成立します.

V 以下の 2 次形式が正定値となる $a \in \mathbf{R}$ の条件を求めましょう.

(1) $x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2axy + 4axz + 2yz$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2a(xy + yz + zx)$

解答 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式ですから,

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 3 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

が求める条件です.

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 3 \end{vmatrix} = 3 - a^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \tag{\$}$$

となります. 次に

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 - 2a^2)$$

となりますから

$$(\$) \text{ AND } |A| > 0 \Leftrightarrow (\$) \text{ AND } 1 - 2a^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

であることが分かります.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式ですから,

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} > 0$$

が求める条件です.

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 > 0 \ \Leftrightarrow \ -1 < a < 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(2a+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > -\frac{1}{2} \quad \text{AND} \quad a \neq 1$$

から条件は

$$-\frac{1}{2} < a < 1$$

であることが分かります.

VI 以下では、実対称行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$
\begin{aligned}
(A\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 (\vec{x} \in \mathbf{R}^2) &\Leftrightarrow A\text{の固有値}\alpha, \beta \geq 0 \\
&\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\text{のとき}a, b \geq 0, |A| \geq 0
\end{aligned}
$$

であることを用います。$m \times 2$ 行列 $B = (\vec{a}\ \vec{b})$ に対して不等式

$$|(\vec{a}, \vec{b})| \leq ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$$

が成立することを示しましょう。さらに不等式の等号成立条件を求めましょう。

解答 $B = {}^tAA$ は対称行列で，任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(B\vec{v}, \vec{v}) = ({}^tAA\vec{v}, \vec{v}) = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ||A\vec{v}||^2 \geq 0$$

が成立します．さらに

$$B = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||\vec{a}||^2 & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & ||\vec{b}||^2 \end{pmatrix}$$

が成立します．これから

$$\Big(|B| = ||\vec{a}||^2 \cdot ||\vec{b}||^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2 \geq 0\Big)$$

が成立します．これから

$$|(\vec{a}, \vec{b})| \leq ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$$

が従います．この等号成立の必要十分条件は $|B| = 0$ ですが，この条件は

$$\ker(B) = \ker({}^tAA) \neq \{\vec{0}\}$$

と必要十分です．他方，一般に

$$\ker({}^tAA) = \ker(A)$$

が成立しますから，条件は

$$\ker(A) \neq \{\vec{0}\}$$

と必要十分であることが分かります．$A = (\vec{a}\ \vec{b})$ に対してこの条件は

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$

と必要十分です．

VII $\mathbf{R}^4$ の部分空間

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} ; \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$$

を定めます。そして V の基底を

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

と取ります。

(1) $V_2 = \mathbf{R}\vec{q}_1 + \mathbf{R}\vec{q}_2$ の正規直交基底基底を求めましょう。

(2) $\vec{q}_2$ の V_2 への直交射影を求めて、V の正規直交基底を求めましょう。

$\vec{w}_1$ を $\vec{q}_2$ の $\vec{q}_1$ 方向への直交射影とすると

$$\vec{w}_1 = \frac{(\vec{q}_2, \vec{q}_1)}{||\vec{q}_1||^2}\vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と求まります．ここで $\vec{q}_1$ に垂直な V のベクトルとして

$$\vec{q}_2 - \vec{w}_1 = \vec{q}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれます．このとき

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{||\vec{q}_1||}\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{||\vec{q}_2 - \vec{w}_1||}(\vec{q}_2 - \vec{w}_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in V$ は正規直交系です．さらに $\vec{q}_3$ の $V_0 = \mathbf{R}\vec{p}_1 + \mathbf{R}\vec{p}_2$ への直交射影を $\vec{w}_2$ とすると

$$\vec{w}_2 = (\vec{q}_3, \vec{p}_1)\vec{p}_1 + (\vec{q}_3, \vec{p}_2)\vec{p}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となります．ここで V_0 に垂直な V のベクトル $\vec{q}_3 - \vec{w}_2$ を大きさ 1 にして

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{||\vec{q}_3 - \vec{w}_2||}(\vec{q}_3 - \vec{w}_2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は V の正規直交基底となります．

VIII $\vec{q}_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とします。

$$V := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{q}_1) = 0\}$$

と 2 次元の部分空間を定めます。このとき $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ の V への正射影 $P\vec{x}$ は

$$P\vec{x} \in V, \quad \vec{x} - P\vec{x} \perp \vec{q}_1$$

で定まります。

(1) P を行列で表しましょう。</dd>

(2) V に関する鏡映

$$Q\vec{x} = \vec{x} + 2(P\vec{x} - \vec{x})$$

で定まる Q を行列で表しましょう。

解答 (1)

$$\begin{aligned} P\vec{v} &= (\vec{q}_1, \vec{v})\vec{q}_1 = \vec{q}_1{}^t\vec{q}_1\vec{v} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ 1)\,\vec{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\vec{v} \end{aligned}$$

から $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

(2)

$$P = 2P - I = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

IX 3 次の直交群

$$O(3) := \{P \in M_3(\mathbf{R});\ {}^tPP = P^tP = I_3\}$$

に対して以下を示しましょう.

(1) $P_1, P_2 \in O(3)$ ならば $P_1P_2 \in O(3)$ を示しましょう.

(2) $P \in O(3)$ ならば ${}^tP \in O(3)$ を示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned} {}^t(P_1P_1)\,P_1P_1 &= {}^tP_2{}^tP_1P_1P_2 = {}^tP_1I_3P_1P_2 \\ &= {}^tP_2P_2 = I_3 \end{aligned}$$

から $P_1P_2 \in O(3)$ が分かります.

別解 $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$(P_1P_2\vec{v}, P_1P_2\vec{w}) = (P_2\vec{v}, P_2\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$

から $P_1P_2 \in O(3)$ が分かります.

(2)

$${}^t\left({}^tP\right){}^tP = P^tP = I_3$$

から ${}^tP \in O(3)$ が分かります.

> **X** $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{tr}(A^5)$ を求めましょう.

解答 まず A の固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -\lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -\lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 0 & 4 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+8)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 1\pm\sqrt{7}i$ であることが分かります. 固有値がすべて単純なので A は対角化可能であることが従いますから, ある正則行列 $P \in M_3(\mathbf{C})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1+\sqrt{7}i & \\ & & 1-\sqrt{7}i \end{pmatrix}$$

が成立します. これから

$$P^{-1}A^5P = \begin{pmatrix} (-2)^5 & & \\ & (1+\sqrt{7}i)^5 & \\ & & (1-\sqrt{7}i)^5 \end{pmatrix}$$

であることが分かります. 従って

$$\mathrm{tr}(A^5) = \mathrm{tr}(P^{-1}A^5P) = (-2)^5 + (1+\sqrt{7}i)^5 + (1-\sqrt{7}i)^5$$

であることが分かります. さらに

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{7}i)^5 + (1-\sqrt{7}i)^5 &= 1 + 5\sqrt{7}i + 10(\sqrt{7}i)^2 + 10(\sqrt{7}i)^3 + 5(\sqrt{7}i)^4 + (\sqrt{7}i)^5 \\ &\quad + 1 - 5\sqrt{7}i + 10(\sqrt{7}i)^2 - 10(\sqrt{7}i)^3 + 5(\sqrt{7}i)^4 - (\sqrt{7}i)^5 \\ \\ &= 2 + 20\cdot 7 + 10\cdot 49 = 320\end{aligned}$$

であることが分かります.

Maxima による計算

```
(%i1) A:matrix([-1,1,2],[1,-1,2],[-2,-2,2]);
                                   [ - 1   1   2 ]
                                   [             ]
(%o1)                              [  1   - 1  2 ]
                                   [             ]
                                   [ - 2  - 2  2 ]
(%i2) eigenvalues(A);
(%o2)         [[1 - sqrt(7) %i, sqrt(7) %i + 1, - 2], [1, 1, 1]]
(%i5) A^^5;
                                 [ 80   112  - 32 ]
```

```
                              [                    ]
(%o5)                         [ 112  80    - 32 ]
                              [                    ]
                              [ 32   32   160  ]
```

XI $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ が定める 2 次形式が，正定値，非負定値，負定値，非正定値であるか考えましょう．

解答

$$(A\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 2 > 0$$

であるので，A が定める 2 次形式が非正定値，負定値でないことが分かります．次に 2 次形式を $y = 0$ に制限して

$$\left(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)\right)$$

から導かれる 2 次小行列について $\left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right| = -5 < 0$ が成立することに注意すると，$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ に負の固有値があることが分かります．従ってある $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$\left(A\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)\right) < 0$$

であることが従います．これから与えられた 2 次形式が非負定値でも正定値でもないことが分かります．

別解

$$|A| = \left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right| = -\left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right| = -\left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{smallmatrix}\right| = -30 < 0$$

であることから，A の固有値 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ に対して

$$\alpha, \beta, \gamma < 0$$

または

$$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$$

が成立するとしても構いません．$\alpha, \beta, \gamma < 0$ の場合は，2 次形式が負定値になってしましますから，あり得ません．他方，$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$ の場合は固有値 $\gamma < 0$ の固有ベクトル $\vec{v}$ に対して

$$(\vec{v}, \vec{v}) = \gamma\|\vec{v}\|^2 < 0$$

が成立しますから，2 次形式が正定値，非正定値ではないことが分かります．

別解 2

$$\Phi_A(\lambda) = \left|\begin{smallmatrix} \lambda-2 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda-6 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda-2 \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ -1 & \lambda-6 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda-2 \end{smallmatrix}\right| = (\lambda+1)\left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-6 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda-2 \end{smallmatrix}\right|$$
$$= (\lambda+1)\left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-5 \end{smallmatrix}\right| = (\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-7)$$

から A の固有値が $\lambda = -1, 4, 7$ であることが分かります．$\lambda = -1$ が固有値であることから A が定める 2 次形式は正定値でも非負定値でもないことが分かります．他方，例えば $\lambda = 4$ が固有値であることから A が定める 2 次形式は負定値でも非正定値でもないことが分かります．

XII $A = \begin{pmatrix} 3&2&2\\ 2&1&3\\ 2&3&1 \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式が，正定値，非負定値，負定値，非正定値であるか考えましょう．

解答

$$(A\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 3 > 0$$

であるので，A が定める 2 次形式が非正定値，負定値でないことが分かります．次に 2 次形式を $x = 0$ に制限して

$$\left(A\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&3\\3&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}y\\z\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}y\\z\end{smallmatrix}\right)\right)$$

から導かれる 2 次小行列について $\left|\begin{smallmatrix}1&3\\3&1\end{smallmatrix}\right| = -8 < 0$ が成立することに注意すると，$\left(\begin{smallmatrix}2&3\\3&2\end{smallmatrix}\right)$ に負の固有値があることが分かります．従ってある $\begin{pmatrix}0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$\left(A\begin{pmatrix}0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}\right) < 0$$

であることが従います．これから与えられた 2 次形式が非負定値でも正定値でもないことが分かります．

別解

$$|A| = \begin{vmatrix} 3&2&2\\ 2&1&3\\ 2&3&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&-1\\ 2&1&3\\ 2&3&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&-1\\ 0&-1&5\\ 0&1&3 \end{vmatrix} = -8$$

であることから，A の固有値 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ に対して

$$\alpha, \beta, \gamma < 0$$

または

$$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$$

が成立するとしても構いません．$\alpha, \beta, \gamma < 0$ の場合は，2 次形式が負定値になってしまいますから，あり得ません．他方，$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$ の場合は固有値 $\gamma < 0$ の固有ベクトル $\vec{v}$ に対して

$$(\vec{v}, \vec{v}) = \gamma\|\vec{v}\|^2 < 0$$

が成立しますから，2 次形式が正定値，非正定値ではないことが分かります．

別解 2

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3&-2&-2\\ -2&\lambda-1&-3\\ -2&-3&\lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3&-2&-2\\ 0&\lambda+2&-\lambda-2\\ -2&-3&\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-3&-2&-2\\ 0&1&-1\\ -2&-3&\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-3&-2&-2\\ 0&1&-1\\ -2&0&\lambda-4 \end{vmatrix}\\
&= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-3&-2\\ -2&\lambda-4 \end{vmatrix}\\
&= (\lambda+2)(\lambda^2 - 7\lambda + 4)
\end{aligned}$$

から A の固有値が $\lambda = -2, \frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$ であることが分かります．$\lambda = -2$ が固有値であることから A が定める 2 次形式は正定値でも非負定値でもないことが分かります．他方，例えば $\lambda = \frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$ が固有値であることから A が定める 2 次形式は負定値でも非正定値でもないことが分かります．

XIII 実対称行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ について以下を考えます．$\alpha \in \mathbf{C}$ に対して条件

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

を満たす複素ベクトル $\vec{v} \in \mathbf{C}^n$ が存在すると仮定します．

(1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ に対して複素共役を $\vec{w} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$ と定めると

$$^t\vec{w}A = \bar{\alpha}{}^t\vec{w} \tag{i}$$

が成立することを導きましょう．

(2) (i) の両辺に左から A を掛けて $\alpha \in \mathbf{R}$ であることを示しましょう．

解答 (1)　$A\vec{v} = \alpha\vec{v}$ の複素共役は

$$A\vec{w} = \bar{\alpha}{}^t\vec{w}$$

となります．ここで $\bar{A} = A$ であることを用いました．次にこの等式の両辺の転置を考えると

$$^t\vec{w}A = \bar{\alpha}{}^t\vec{w}w$$

が従います．

(2) (i) の両辺に右から $\vec{v}$ を掛けると

$$LHS = {}^t\vec{w}A\vec{v} = {}^t\vec{w}(\alpha\vec{v}) = \alpha\left(|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2\right)$$

$$RHS = \bar{\alpha}{}^t\vec{w}\vec{v} = \bar{\alpha}\left(|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2\right)$$

となりますが，$\left(|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2\right) \neq 0$ であることに注意すると

$$\alpha\left(|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2\right) = \bar{\alpha}\left(|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2\right)$$

から $\alpha = \bar{\alpha}$ が従いますが，これは $\alpha \in \mathbf{R}$ であることを意味します．

XIV $>\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ に対して

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 0,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 0,\ \alpha\beta\gamma \geq 0 \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

を示しましょう．

解答 $\gamma < 0$ として矛盾を導きます．$\alpha + \beta \leq 0$ とすると $\alpha + \beta + \gamma < 0$ となりますから

$$\alpha + \beta > 0$$

であることが従います．他方 $\gamma < 0$ と $\alpha\beta\gamma \geq 0$ から

$$\alpha\beta \leq 0 \tag{i}$$

が従います．$\alpha + \beta > 0$ と $\gamma < 0$ から $\gamma(\alpha + \beta) < 0$ となりますから

$$\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) \geq 0$$

から $\alpha\beta > 0$ となります．これは (i) と矛盾します．以上で $\gamma \geq 0$ が示されました．$\alpha, \beta \geq 0$ も同様に示せます．

XV 3 次の実対称行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{smallmatrix}\right)$ が条件

$$a, b, c \geq 0$$

$$\left|\begin{smallmatrix} a & p \\ p & b \end{smallmatrix}\right|,\ \left|\begin{smallmatrix} a & q \\ q & c \end{smallmatrix}\right|,\ \left|\begin{smallmatrix} b & r \\ r & c \end{smallmatrix}\right| \geq 0$$

$$|A| \geq 0$$

を満たすとき A の固有値 α, β, γ が

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\Phi_A(\lambda)\& = \lambda^3 - (a+b+c)\lambda^2 + \left(\left|\begin{smallmatrix} a & p \\ p & b \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} a & q \\ q & c \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} b & r \\ r & c \end{smallmatrix}\right|\right)\lambda - |A|$$

であることから

$$\alpha + \beta + \gamma = a + b + c \geq 0$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \left|\begin{smallmatrix} a & p \\ p & b \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} a & q \\ q & c \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} b & r \\ r & c \end{smallmatrix}\right| \geq 0$$

$$\alpha\beta\gamma = |A| \geq 0$$

であることが分かります．これは $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ と同値です．

XVI V, W が $\mathbf{K}^n$ の部分空間とします．$V + W$ が直和ならば

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$$

であることを証明しましょう．

解答 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ は V の基底であり，$\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_\ell$ は W の基底とします．このとき $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_\ell$ は $V + W$ の基底であることを示します．$\vec{p} \in V + W$ に対して

$$\vec{p} = \vec{v} + \vec{w}$$

を満たす $\vec{v} \in V$, $\vec{w} \in W$ が存在することが分かります．このとき V の基底と W の基底を用いて $\vec{v}$ と $\vec{w}$ は

$$\begin{aligned} \vec{v} &= c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k \\ \vec{w} &= c_{k+1}\vec{w}_1 + \cdots + c_{k+\ell}\vec{w}_\ell \end{aligned}$$

と表されますから

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{v} + \vec{w} \\ &= c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k \\ &\quad c_{k+1}\vec{w}_1 + \cdots + c_{k+\ell}\vec{w}_\ell \end{aligned}$$

と表されます．さらに $V + W$ が直和であることを用いると

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k + c_{k+1}\vec{w}_1 + \cdots + c_{k+\ell}\vec{w}_\ell = \vec{0}$$

ならば

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

$$c_{k+1}\vec{w}_1 + \cdots + c_{k+\ell}\vec{w}_\ell = \vec{0}$$

が従います．$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ は V は線型独立であり，$\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_\ell$ も線型独立ですから

$$c_1 = \cdots = c_k = 0, \quad c_{k+1} = \cdots = c_{k+\ell} = 0$$

であることが分かります．よって $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_\ell$ が線型独立であることも分かります．以上で

$$\dim(V+W) = k + \ell = \dim(V) + \dim(W)$$

XVII $A \in M_n(\mathbf{R})$ が対称とします。
(1) F を $n \times \ell$ 行列とするとき

$$B = {}^tFAF$$

が対称であることを示しましょう。
(2) A が定める 2 次形式が非負定値とします。すなわち

$$(A\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$$

が成立するとします。このとき B が定める 2 次形式も非負定値となることを示しましょう。
(3) A が定める 2 次形式が正定値とします。また

$$F = (\vec{f}_1 \ \cdots \vec{f}_\ell)$$

と列ベクトル表示をするとき $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_\ell$ は 1 次独立とします。このとき B が定める 2 次形式も正定値となることを示しましょう。

解答

$${}^t\left(B = {}^tFAF\right) = {}^tF \cdot {}^tB \cdot {}^t({}^tF) = {}^tF \cdot B \cdot F$$

から ${}^tFBF$ が対称であることが分かります．
(2) $\vec{w} \in \mathbf{R}^\ell$ に対して

$$(B\vec{w}, \vec{w}) = ({}^tFAF\vec{w}, \vec{w}) = (AF\vec{w}, F\vec{w}) \geq 0$$

から B が定める 2 次形式が非負定値であることが分かります．
(3) このとき A が定める 2 次形式が正定値であることから，B が定める 2 次形式は非負定値であること，すなわち $\vec{w} \in \mathbf{R}^\ell$ に対して

$$(B\vec{w}, \vec{w}) \geq 0$$

であることが分かります．さらに $\vec{w} \in \mathbf{R}^\ell$ に対して，

$$(B\vec{w}, \vec{w}) = ({}^tFAF\vec{w}, \vec{w}) = (AF\vec{w}, F\vec{w}) = 0$$

であることから $F\vec{w} = \vec{0}$ が従います．$\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_\ell$ が 1 次独立であることから $\ker(F) = \{\vec{0}\}$ が成立しますから，$\vec{w} = \vec{0}$ が従います．以上から

$$\vec{w} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow (B\vec{w}, \vec{w}) > 0$$

が分かります．よって B が定める 2 次形式は正定値であることが示されました．

XVIII $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とします。すなわち、実 $m \times n$ 行列とします。このとき $\mathbf{R}^n$ 中で

$$\ker({}^tAA) = \ker(A)$$

が成立することを示しましょう。

解答 $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$A\vec{w} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad {}^tAA\vec{v} = \vec{0}$$

が成立しますから $\ker(A) \subset \ker({}^tAA)$ であることが分かります.

逆に $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ が ${}^tAA\vec{v} = \vec{0}$ を満たすとします. このとき

$$||A\vec{v}||^2 = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ({}^tAA\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

から $A\vec{v} = \vec{0}$ であることが従います. これから $\ker(A) \supset \ker({}^tAA)$ であることが分かります.

IXX(1) $R = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in SO(3)$ で

$$\ker(R - I_3) = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

であることを示せ.

(2) $\vec{p}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ である $P \in SO(3)$ を求めて $P^{-1}RP$ を計算しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned}
{}^tRR &= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & 8 \\ 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+64+1 & -16+8+8 & 28-32+4 \\ -16+8+8 & 16+1+64 & -28-4+32 \\ 28-32+4 & -28-4+32 & 49+16+16 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(R) &= \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 9 & 9 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{9^2}\begin{vmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9^2}\begin{vmatrix} 0 & -8 & 7 \\ 0 & -7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{9^2}(32+49) = \frac{1}{9^2}\cdot 81 = 1
\end{aligned}$$

から $R \in SO(3)$ であることが分かります．さらに

$$R - I = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 7 \\ 8 & -8 & -4 \\ 1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ -5 & -4 & 7 \\ 8 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 0 & -72 & 36 \\ 0 & 36 & -18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 36 & -18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できるので

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & - & z & = & 0 \\ & & y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \end{array} \right.$$

であることが分かります．これから $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \ker(R - I)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となりますから

$$\ker(R - I) = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．

(2) $\vec{p}_2 \perp \vec{p}_1$, $||\vec{p}_2|| = 1$ を満たす $\vec{p}_2 \in \mathbf{R}^3$ として

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を選びます．さらに

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \left|\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right| \\ -\left|\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right| \\ \left|\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right| \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$$

となります．$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ の選び方から

$$||\vec{p}_1|| = ||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

が成立します．さらに外積の性質から

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$$

が成立します．また $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ のなす角が $\frac{\pi}{2}$ であることから

$$||\vec{p}_3|| = ||\vec{p}_1|| \cdot ||\vec{p}_2|| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

であることも分かります．さらに

$$\det(\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) = (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \vec{p}_3) = ||\vec{p}_3||^2 = 1$$

から $P \in SO(3)$ であることが分かります．このとき

$$P^{-1}RP = {}^tPRP = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -81 \\ 0 & 81 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

XX $\vec{p}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ である $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \in SO(3)$ を求めましょう．

解答 $||\vec{p}_1|| = 1$ であることに注意しましょう．次に

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$$

と定めると

$$||\vec{p}_2|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

であることが分かります．次に $\vec{p}_3 \in \mathbf{R}^3$ で

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$$

を満たすものを求めます．$\vec{e}_1$ の $V_2 = \mathbf{R}\vec{p}_1 + \mathbf{R}\vec{p}_2$ への直交射影

$$\begin{aligned} \vec{w}_2 &:= (\vec{p}_1, \vec{e}_1)\vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{e}_1)\vec{p}_2 \\ &= \left(\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) \cdot \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

を用いて

$$\vec{q}_3 = \frac{1}{||\vec{e}_1 - \vec{w}_2||}(\vec{e}_1 - \vec{w}_2) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$$

と定めると

$$||\vec{q}_3||=1, \quad (\vec{p}_1,\vec{q}_3)=(\vec{p}_2,\vec{q}_3)=0$$

が成立します．さらに

$$\begin{aligned} |\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{q}_3| &= \left|\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \quad \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right| \\ &= \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{18} \cdot (-1)(-2)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot (-9) = -1 \end{aligned}$$

となります．ここで $\vec{p}_3 = -\vec{q}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ と定めると

$$||\vec{p}_3|| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$$

$$|\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3| = |\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ -\vec{q}_3| = -|\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{q}_3| = -(-1) = 1$$

が従います．以上で

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \in SO(3)$$

であることが分かります．

XXI 単位ベクトル $\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とします．部分空間 $\mathbf{R}\vec{q}_1$ の直交補空間

$$V = (\mathbf{R}\vec{q}_1)^{\perp} = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{q}_1) = 0\}$$

に関する鏡映 R を

$$R\vec{x} = \vec{x} + 2(P\vec{x} - \vec{x})$$

によって定義します．ただし，ここで P は V への直交射影とします．

(1) R を行列として表しましょう．

(2) $|R|$ を求めましょう．

(3) R を直交行列で対角化しましょう．

解答 (1) $\vec{q}_1$ を延長して $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求めます．まず

$$\vec{q}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

とすると

$$||\vec{q}_1|| = ||\vec{q}_2|| = 1, \quad (\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0$$

となります．次に

$$\vec{q}_3 = \vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

とすると外積の幾何学的性質から

$$||\vec{q}_3|| = 1, \quad (\vec{q}_3, \vec{q}_1) = (\vec{q}_3, \vec{q}_2) = 0$$

が成立します．$\dim V = 2$ から $\vec{q}_2, \vec{q}_3$ が V の正規直交基底となりますから，$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$P\vec{v} = (\vec{v}, \vec{p}_1)\vec{p}_1 + (\vec{v}, \vec{p}_2)\vec{p}_2 = \left(\vec{p}_1 \cdot {}^t\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \cdot {}^t\vec{p}_2\right)\vec{v}$$

となりますから

$$\begin{aligned}
R &= 2P - I_3 \\
&= 2\vec{p}_1 \cdot {}^t\vec{p}_1 + 2\vec{p}_2 \cdot {}^t\vec{p}_2 - I_3 \\
&= \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2)+(3)

$$\begin{aligned}
R\vec{q}_1 &= 2(\vec{q}_1, \vec{q}_2)\vec{q}_2 + 2(\vec{q}_1, \vec{q}_3)\vec{q}_3 - \vec{q}_1 = -\vec{q}_1 \\
R\vec{q}_2 &= 2(\vec{q}_2, \vec{q}_2)\vec{q}_2 + 2(\vec{q}_2, \vec{q}_3)\vec{q}_3 - \vec{q}_2 = \vec{q}_2 \\
R\vec{q}_3 &= 2(\vec{q}_3, \vec{q}_2)\vec{q}_2 + 2(\vec{q}_3, \vec{q}_3)\vec{q}_3 - \vec{q}_3 = \vec{q}_3
\end{aligned}$$

から

$$R(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad Q^{-1}RQ = \begin{matrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix}$$

から

$$|R| = |Q^{-1}RQ| = \begin{vmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = -1$$

であることが分かります.