後期 L10 演習問題解答

I $p, q, I, \bar{u} > 0$ とします.
(1) $u(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ とします. 制約条件

$$g_1(x,y) := \bar{u} - u(x,y) = 0$$

の下で $f(x,y) = px + qy$ を考えます. 停留点を求めましょう.
(2) 制約条件 $g_2(x,y) := I - px - qy = 0$ の下で $u(x,y)$ を最大化します. 停留点を求めましょう.

解答 (1) $(x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}$ で極小であるとすると

$$\begin{cases} p - \mu \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 0 & \cdots(1) \\ q - \mu \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} = 0 & \cdots(2) \\ \bar{u} - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 0 & \cdots(3) \end{cases}$$

を満たす $\mu \in \mathbf{R}$ が存在します. さらに $(1) \times x$ と $(2) \times y$ から

$$2px = \mu\bar{u}, \quad 2qy = \mu\bar{u}$$

から $px = qy$ が従います. $y = \frac{px}{q}$ を (3) に代入すると

$$x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{px}{q}\right)^{\frac{1}{2}} = \bar{u} \quad \text{から} \quad x = \bar{u}\sqrt{\frac{q}{p}}$$

が従います. 同様に

$$y = \bar{u}\sqrt{\frac{p}{q}}$$

が成立します. このとき $\frac{x}{y} = \frac{q}{p}$ から Lagrange 未定乗数は

$$\mu = 2px^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{pq}$$

となります.

(2) $(x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}$ で極大であるとすると

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \lambda(-p) = 0 & \cdots(1) \\ \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \lambda(-q) = 0 & \cdots(2) \\ I - px - qy = 0 & \cdots(3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します. (1) において $\lambda = 0$ とすると $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 0$ となりますが $x, y > 0$ であることに反します. よって $\lambda \neq 0$ であることが分かります.

さらに $(1) \times x$ と $(2) \times y$ から

$$\lambda px = \lambda qy = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

となります. これから $px = qy$ が従います. ここで (3) を用いると

$$px = qy = \frac{I}{2}$$

から

$$x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

が従います. このとき所得の限界効用関数は

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{px} \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{I} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{2p}}\sqrt{\frac{I}{2q}} = \frac{1}{2\sqrt{pq}} \end{aligned}$$

となります.

注意 間接効用関数は

$$v(p,q,I) = \left(\frac{I}{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{I}{2q}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}$$

となりますが,

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

が成立することに注意しましょう.

II I によって得られた Higgs 型（補償）需要関数を

$$x^*(p,q,\bar{u}),\ y^*(p,q,\bar{u})$$

とします．最小支出関数

$$E(p,q,\bar{u}) = px^*(p,q,\bar{u}) + qy^*(p,q,\bar{u})$$

と定めるとき，マッケンジーの補題

$$\frac{\partial E}{\partial p}(p,q,\bar{u}) = x^*(p,q,\bar{u}), \quad \frac{\partial E}{\partial q}(p,q,\bar{u}) = y^*(p,q,\bar{u})$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\begin{aligned} E(p,q,\bar{u}) &= p\cdot\bar{u}\sqrt{\frac{q}{p}} + q\cdot\bar{u}\sqrt{\frac{p}{q}} \\ &= 2\bar{u}\sqrt{pq} \end{aligned}$$

となります．このとき

$$\begin{aligned} E_p &= 2\bar{u}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\sqrt{q} = \bar{u}\sqrt{\frac{q}{p}} = x^*(p,q,\bar{u}) \\ E_q &= 2\bar{u}\cdot\sqrt{p}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{q}} = \bar{u}\sqrt{\frac{p}{q}} = y^*(p,q,\bar{u}) \end{aligned}$$

III

I(2) で求めたように，$I - px - qy = 0$ の下で $u(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ を最大化して需要関数

$$x(p,q,I) = \frac{I}{2p},\ y(p,q,I) = \frac{I}{2q},$$

を得たとします．間接効用関数を

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), y(p,q,I))$$

と定めるとき，以下が成立することを具体的に計算して示しましょう．

(1)

$$x^*(p,q,\bar{u}) = x(p,q,E(p,q,\bar{u}))$$

(2)

$$x(p,q,I) = x^*(p,q,v(p,q,I))$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \bar{u}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I)) = I$$

解答 (1)

$$x(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{2\bar{u}\sqrt{pq}}{2p} = \bar{u}\sqrt{\frac{q}{p}} = x^*(p,q,\bar{u})$$

(2)

$$v(p,q,I) = \sqrt{x(p,q,I)\cdot y(p,q,I)} = \sqrt{\frac{I}{2p}}\cdot\sqrt{\frac{I}{2q}} = \frac{I}{2\sqrt{pq}}$$

が成立します．他方

$$x^*(p,q,v(p,q,I)) = \frac{I}{2\sqrt{pq}}\cdot\sqrt{\frac{q}{p}} = \frac{I}{2p} = x(p,q,I)$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{2\bar{u}\sqrt{pq}}{2\sqrt{pq}} = \bar{u}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I)) = 2\cdot\frac{I}{2\sqrt{pq}}\cdot\sqrt{pq} = I$$

IV $p,q,I,\bar{u} > 0$ とします．
(1) $u(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ とします．制約条件

$$g_1(x,y) := \bar{u} - u(x,y) = 0$$

の下で $f(x,y) = px + qy$ を考えます．停留点を求めましょう．
(2) 制約条件 $g_2(x,y) := I - px - qy = 0$ の下で $u(x,y)$ を最大化します．停留点を求めましょう．

解答 (1) $(x,y)\in\mathbf{R}^2_{++}$ で極小であるとすると

$$\begin{cases} p - \mu\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = 0 & \cdots(1)\\ q - \mu\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{1}{1}}y^{-\frac{1}{3}} = 0 & \cdots(2)\\ \bar{u} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 0 & \cdots(3)\end{cases}$$

を満たす $\mu\in\mathbf{R}$ が存在します．(1) において $\mu = 0$ とすると $p = 0$ となり，$p > 0$ に反しますから $\mu\neq 0$ が成立します．さらに $(1)\times x$ と $(2)\times y$ から

$$3px = \mu\bar{u},\quad 3qy = 2\mu\bar{u}$$

から $2px = qy$ が従います．$y = \frac{2px}{q}$ を (3) に代入すると

$$x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2px}{q}\right)^{\frac{2}{3}} = \bar{u}\quad から\quad x = \bar{u}\left(\frac{q}{2p}\right)^{\frac{2}{3}}$$

が従います．同様に

$$y = \bar{u}\left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{1}{3}}$$

が成立します．このとき $\frac{x}{y} = \frac{q}{2p}$ から Lagrange 未定乗数は

$$\mu = \frac{3px}{\bar{u}} = 3p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}$$

となります．

(2) $(x,y)\in\mathbf{R}^2_{++}$ で極大であるとすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + \lambda(-p) = 0 & \cdots(1)\\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} + \lambda(-q) = 0 & \cdots(2)\\ I - px - qy = 0 & \cdots(3)\end{cases}$$

を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．(1) において $\lambda = 0$ とすると $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 0$ となりますが $x,y > 0$ であ

ることに反します．よって $\lambda \neq 0$ であることが分かります．

さらに $(1) \times x$ と $(2) \times y$ から

$$3\lambda px = \frac{3}{2} \cdot \lambda qy = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

となります．これから $px = \frac{1}{2}qy$ が従います．ここで (3) を用いると

$$px = \frac{I}{3}, \quad qy = \frac{2I}{3}$$

から

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

が従います．このとき所得の限界効用関数は

$$\lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} \cdot \frac{1}{p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}}}$$

となります．

注意 間接効用関数は

$$v(p,q,I) = \left(\frac{I}{3p}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2I}{3q}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} \cdot \frac{I}{p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}}} \tag{25}$$

となりますが，

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

が成立することに注意しましょう．

V IV によって得られた Higgs 型（補償）需要関数を

$$x^*(p,q,\bar{u}),\ y^*(p,q,\bar{u})$$

とします．最小支出関数

$$E(p,q,\bar{u}) = px^*(p,q,\bar{u}) + qy^*(p,q,\bar{u})$$

と定めるとき，マッケンジーの補題

$$\frac{\partial E}{\partial p}(p,q,\bar{u}) = x^*(p,q,\bar{u}), \quad \frac{\partial E}{\partial q}(p,q,\bar{u}) = y^*(p,q,\bar{u})$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$E(p,q,\bar{u}) = p \cdot \left(\frac{q}{2p}\right)^{\frac{2}{3}} \bar{u} + q \cdot \left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \bar{u} \qquad = \frac{3}{2}\,(2p)^{\frac{1}{3}}\, q^{\frac{2}{3}} \bar{u}$$

となります．このとき

$$E_p = \frac{3}{2} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} p^{-\frac{2}{3}} q^{\frac{2}{3}} \bar{u} = (2p)^{-\frac{2}{3}}\, q^{\frac{2}{3}} \bar{u} = x^*(p,q,\bar{u})$$
$$E_q = \frac{3}{2} (2p)^{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} q^{-\frac{1}{3}} \bar{u} = (2p)^{\frac{1}{3}}\, q^{-\frac{1}{3}} \bar{u} = y^*(p,q,\bar{u})$$

VI IV(2) で求めたように，$I - px - qy = 0$ の下で $u(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ を最大化して需要関数

$$x(p,q,I) = \frac{I}{3p},\ y(p,q,I) = \frac{2I}{3q},$$

を得たとします．間接効用関数を

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), y(p,q,I))$$

と定めるとき，以下が成立することを具体的に計算して示しましょう．

(1) $x^*(p,q,\bar{u}) = x(p,q,E(p,q,\bar{u}))$

(2) $x(p,q,I) = x^*(p,q,v(p,q,I))$

(3) $v(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \bar{u}$

(4) $E(p,q,v(p,q,I)) = I$

解答 (1)

$$x(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{1}{3p}\cdot\frac{2}{3}(2p)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}\bar{u} = (2p)^{-\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}}\bar{u}$$
$$y(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{2}{3q}\cdot\frac{3}{2}(2p)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}\bar{u} = (2p)^{\frac{1}{3}}q^{-\frac{1}{3}}\bar{u} = y^*(p,q,\bar{u})$$

(2) IV の (25) から

$$v(p,q,I) = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{I}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}}$$

が成立します．他方

$$x^*(p,q,v(p,q,I)) = \left(\frac{q}{2p}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{I}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}} = \frac{I}{3p} = x(p,q,I)$$
$$y^*(p,q,v(p,q,I)) = \left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{I}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}} = \frac{2I}{3q} = x(p,q,I)$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{1}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{3}{2}(2p)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}\bar{u} = \bar{u}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I)) = \frac{3}{2}(2p)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\cdot\frac{I}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}} = I$$