経済数学入門 L08 Part 01.

# 行列の演算

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 04 月 19,26 日 at 駒場
2020 年 06 月 22 日　経済数学入門

# ベクトルの演算の性質（復習）

$\mathbb{K}$ $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

**定理 1**

**(1)** $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{2}$$

**(2)** $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{K}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ に対して

$$\lambda\,(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \tag{3}$$

$$(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \tag{4}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \tag{5}$$

# 和と定数倍

$m \times n$ 行列，すなわち $m$ 行 $n$ 列の行列

列ベクトル表示

行ベクトル表示

$$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_j \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

成分．

i行j列．

i行

$$B = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_j \cdots \vec{b}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} = (b_{ij})$$

i行j列

(i,j)成分．

に対して

# 和と定数倍 (2)

その和と差を

$$A+B=\left(\vec{a}_1+\vec{b}_1\cdots\vec{a}_j+\vec{b}_j\cdots\vec{a}_n+\vec{b}_n\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{b}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}=(a_{ij}+b_{ij})$$

$$A-B=\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1\cdots\vec{a}_j-\vec{b}_j\cdots\vec{a}_n-\vec{b}_n\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{b}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}=(a_{ij}-b_{ij})$$

と定めます.

# 和と定数倍(3)

定数 $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して $A$ の $\alpha$ 倍を

$$\alpha A = (\alpha\vec{a}_1 \ \cdots \ \alpha\vec{a}_j \ \cdots \ \alpha\vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \alpha\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \alpha\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \alpha\boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = (\alpha \cdot a_{ij})$$

i行

# 定理2

$m$ 行 $n$ 列の行列 $A$, $B$, $C$ に対して，以下が成立します.

**(1)** $A + B = B + A$

**(2)** $(A + B) + C = A + (B + C)$　　結合則.

**(3)** $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

**(4)** $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

**(5)** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

$A = (\vec{a}_j)$, $B = (\vec{b}_j)$, $C = (\vec{c}_j)$ と行列 $A$, $B$, $C$ の $j$ 列を用いて定理2を示します.

# 証明

j34.

**(1)** $A + B = (\vec{a}_j + \vec{b}_j) = (\vec{b}_j + \vec{a}_j) = B + A$
から証明できます．ここで定理 1 の (1) を用いました．

**(2)** $(A + B) + C = (\vec{a}_j + \vec{b}_j) + (\vec{c}_j) = \left((\vec{a}_j + \vec{b}_j) + \vec{c}_j\right) = \left(\vec{a}_j + (\vec{b}_j + \vec{c}_j)\right) = A + (B + C)$
から証明できます．ここで定理 1 の (2) を用いました．

$A+B+C$ とかいてよいです.

(3), (4), (5) 各自. → ビデオ

# 行列 × 列ベクトル (1)

$\vec{a}_j \in \mathbb{K}^m$

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

m 行 n あり

$\in \mathbb{K}^n$

との積を

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbf{K}^m$$

# 行列 × 列ベクトル (2)

$$= (a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_j\vec{a}_j + \ldots + x_n\vec{a}_n$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots \\ x_1 a_{i1} + \ldots + x_j a_{ij} + \ldots + x_n a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \Leftarrow i \text{成分}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{x} \\ \vdots \\ \boxed{\mathbf{a}_i\vec{x}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\vec{x} \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + x_j \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$(a_1 \cdots a_n)\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} := a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n.$$

# 行列 × 行列

$A$ : $m$ 行 $n$ 列

$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$

$\vec{a}_j \in \mathbf{K}^m$

$\in \mathbf{K}^n$

$X = (\vec{x}_1 \ \ \ldots \ \vec{x}_k \ \ldots \ \ \vec{x}_\ell)$ が $n$ 行 $\ell$ 列とします.

**注** $A\vec{x}_1, \ldots, A\vec{x}_k, \ldots, A\vec{x}_\ell \in \mathbf{K}^m$ が定義される.

$$
\begin{aligned}
AX &= A(\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_k \ \cdots \ \vec{x}_\ell) \\
&= (A\vec{x}_1 \ \cdots \ \boxed{A\vec{x}_k} \ \cdots \ A\vec{x}_\ell)
\end{aligned}
$$

$m$ 行 $\ell$ 列.

$$
= \begin{pmatrix}
\mathbf{a}_1\vec{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1\vec{x}_k & \cdots & \mathbf{a}_1\vec{x}_\ell \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{a}_i\vec{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i\vec{x}_k & \cdots & \mathbf{a}_i\vec{x}_\ell \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{a}_m\vec{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m\vec{x}_k & \cdots & \mathbf{a}_m\vec{x}_\ell
\end{pmatrix}
$$

$\mathbf{a}_i X$

$m$ 行 $\ell$ 列.

# 行列 × 行列 (2)

125・34.

特に $m = 1$, すなわち $A = \mathbf{a} = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ のとき

$$\mathbf{a}X = (\mathbf{a}\vec{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}\vec{x}_\ell) \rightarrow \cdots$$

これを用いると

$$AX = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m X \end{pmatrix}$$

# 行列 × 行列 (3)

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$= (a_1 \cdots a_n)$

$\begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$

相成る。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}X &= (\mathbf{a}\vec{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}\vec{x}_k \ \cdots \ \mathbf{a}\vec{x}_\ell) \\
&= (\cdots \ \boxed{a_1x_{1k} + a_2x_{2k} + \cdots + a_nx_{nk}} \ \cdots) \\
&= \begin{array}{ll} & a_1(\cdots \ x_{1k} \ \cdots) \\ + & a_2(\cdots \ x_{2k} \ \cdots) \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ + & a_n(\cdots \ x_{nk} \ \cdots) \end{array} \\
&= a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n
\end{aligned}
$$

$= x_1$

$= x_n$

# 行列×行列(4)—行ベクトルを中心にして

## まとめ

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_j \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_j\mathbf{x}_j + \cdots + a_n\mathbf{x}_n$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} = 1 \cdot a_1 + 0\mathbb{b} + 0\mathbb{C} = a_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot \mathbb{b} + 0 \cdot \mathbb{C} = \mathbb{b}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} = \qquad = \mathbb{C}$$

---

$$\begin{pmatrix} \boxed{1\ 0\ 0} \\ \boxed{0\ 1\ 0} \\ \boxed{0\ 0\ 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{c} \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{a}_1 \end{pmatrix} \qquad 1r \leftrightarrow 3r.$$

$\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{c} \end{pmatrix} \qquad 1r \times = \lambda$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{b} \\ \mathbb{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{b} \\ \lambda \mathbb{a}_1 + \mathbb{c} \end{pmatrix} \qquad 3r += 1r \times \lambda.$$

# 線型写像 (1)

$+ \cdot \times$　　$\vec{a}_j \in \mathbb{K}^m$

$A : m \times n$

$\vec{x} \in \mathbb{K}^n$

$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$

$$F_A(\vec{x}) := A\vec{x}$$

によって定る写像

$$F_A : \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x} \tag{7}$$

について定理 3 が成立します（$F_A$ の線型性）

**定理 3**

$$F_A(\vec{x} + \vec{y}) = F_A(\vec{x}) + F_A(\vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n) \tag{8}$$

$$F_A(\lambda\vec{x}) = \lambda F_A(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbf{K}^n,\ \lambda \in \mathbf{K}) \tag{9}$$

## 線型写像(2)—定理3の証明

$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_j+y_j \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ と $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の成分表示をします．すると

$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_j \cdots \vec{a}_n)$

$$\begin{aligned} F_A(\vec{x}+\vec{y}) &= (x_1+y_1)\vec{a}_1 + \cdots + \boxed{(x_j+y_j)\vec{a}_j} + \cdots + (x_n+y_n)\vec{a}_n \\ &= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n \\ &\quad + y_1\vec{a}_1 + \cdots + y_j\vec{a}_j + \cdots + y_n\vec{a}_n \\ &= F_A(\vec{x}) + F_A(\vec{y}) \\ F_A(\lambda\vec{x}) &= (\lambda x_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\lambda x_j)\vec{a}_j + \cdots + (\lambda x_n)\vec{a}_n \\ &= \lambda(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n) = \lambda F_A(\vec{x}) \end{aligned}$$

$x_j\vec{a}_j + y_j\vec{a}_j$

$\lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_j \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$

# 線型写像 (3)—定理 3 の拡張

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell \in \mathbb{K}^n$

行列の積の形では

$A(\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_\ell) = A\vec{x}_1 + \dots + A\vec{x}_\ell$

$$A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \quad A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) \tag{10}$$

と表されます．これをまとめて得られる

$$A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y} \tag{11}$$

および (10) を繰り返して得られる

$= A(c_1\vec{x}_1) + \dots + A(c_\ell\vec{x}_\ell)$

$$A(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_\ell\vec{x}_\ell) = c_1 A\vec{x}_1 + \cdots + c_\ell A\vec{x}_\ell \tag{12}$$

も有用です．この公式 (12) は $X = (\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_\ell)$ と $\vec{c} = {}^t(c_1 \ \cdots \ c_\ell)$ を用いて

n 行 ℓ 列．

結合則．

$$A(X\vec{c}) = (AX)\vec{c} \tag{13}$$

$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\ell \end{pmatrix}$

$(A\vec{x}_1 \cdots A\vec{x}_\ell)$

とも表現できます．

# 写像の合成

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$g \circ f.$

2 つの写像 $f:\ X \to Y$ と $g:\ Y \to Z$ があるとします．このとき

$x \mapsto f(x)$　　$y \mapsto g(y)$　　$y = f(x)$

$$g \circ f:\ X \to Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

$(h \circ g) \circ f.$

が定義できます．これを $f$ と $g$ の合成写像と呼びます．
さらに写像 $h:\ Z \to W$ がある場合は

$X \to Y \to Z \xrightarrow{h} W$

$$h \circ g \circ f:\ X \to W$$

$h \circ (g \circ f)$

が定義できますが，これは

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

と，合成をどの順序で行っても変わりません．

$\forall x \in X \quad h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x).$

# 行列の積の性質 (1)

$+ \quad \cdot \quad \times$

$\alpha\cdot$

**定理 4** $A$ と $B$ は $m \times n$ 行列，$X$ と $Y$ は $n \times \ell$ 行列，$Q$ は $\ell \times g$ 行列とします．このとき次が成立します．

**(1)** $(A + B)X = AX + BX$

**(2)** $A(X + Y) = AX + AY$

**(3)** $A(\alpha X) = (\alpha A)X = \alpha(AX)$

**(4)（結合法則）** $(AX)Q = A(XQ)$

# 行列の積の性質 (2)—証明の準備（その 1）

定理 4 の証明の準備として $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$, $B = \left(\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n\right)$ と $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} \tag{14}$$

定理4(1)

を示します．実際

$$\begin{aligned}
(A+B)\vec{x} &= \left(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n + \vec{b}_n\right)\vec{x} \\
&= x_1(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + \cdots + x_n(\vec{a}_n + \vec{b}_n) \\
&= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n + x_1\vec{b}_1 + \cdots + x_n\vec{b}_n = A\vec{x} + B\vec{x}
\end{aligned}$$

と示すことができます．

$$= (x_1\vec{a}_1 + x_1\vec{b}_1) + \cdots + (x_n\vec{a}_n + x_n\vec{b}_n)$$

# 行列の積の性質 (3)—証明の準備（その 2）

(10) で以下の最初の等号を示しましたが

$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha\,(A\vec{x}) = (\alpha A)\vec{x} \qquad (15)$$

が成立することも定理 4 の **(3)** の証明で使います．実際，2 番目の等号は $\vec{x} = {}^t(x_1 \;\; \cdots \;\; x_n)$ として

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(\alpha A)\,\vec{x} &= \begin{pmatrix}\alpha\vec{a}_1 & \cdots & \alpha\vec{a}_n\end{pmatrix}\vec{x} \\ &= x_1\alpha\vec{a}_1 + \cdots + x_n\alpha\vec{a}_n = \alpha\left(\boxed{x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n}\right) = \alpha\,(A\vec{x})\end{aligned}$$

$$= \alpha(x_1\vec{a}_1) + \cdots + \alpha(x_n\vec{a}_n)$$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda(\mu\vec{a}) \\ &= (\lambda\mu)\vec{a}\end{aligned}\right\} \rightarrow \lambda\mu\vec{a}$$

# 行列の積の性質(4)—証明(1)

**(1)**

$(A+B)X = AX + BX$

両辺の $k$ 列を比較します.

$$(A+B)\vec{x}_k = A\vec{x}_k + B\vec{x}_k$$

から分かります（(14) 参照).

**(2)** 両辺の $k$ 列を比較します.

$A(X+Y) = AX + AY.$

$$A\left(\vec{x}_k + \vec{y}_k\right) = A\vec{x}_k + A\vec{y}_k$$

から分かります（(10) 参照).

**(3)** 各辺の $k$ 列を比較しますが (15) は

$A(\alpha X) = (\alpha A)X$

$= \alpha(AX)$

$$A(\alpha\vec{x}_k) = (\alpha A)\vec{x}_k = \alpha(A\vec{x}_k)$$

を導きます.

# 行列の積の性質 (5)—証明 (2)

$A: m \times n$
$X \quad n \times \ell.$
$Q: \ell \times g.$
$= (\cdots \vec{q}_t \cdots)$

**(4)** (13) を用いると $\vec{q} \in \mathbf{K}^{\ell}$ に対して

$$A(X\vec{q}) = (AX)\vec{q}$$

が成立します．$Q$ の $t$ 列を $\vec{q}_t$ とすると

$A(XQ)$
$= (AX)Q$

$$A(X\vec{q}_t) = (AX)\vec{q}_t$$

ですが，これは示すべき式の $t$ 列が等しいことを意味します．これを用いると

$$\begin{aligned} A(XQ) &= A(X\vec{q}_1 \ \cdots \ X\vec{q}_g) = (A(X\vec{q}_1) \ \cdots \ A(X\vec{q}_g)) \\ &= ((AX)\vec{q}_1 \ \cdots \ (AX)\vec{q}_g) = (AX)(\vec{q}_1 \ \cdots \ \vec{q}_g) = (AX)Q \end{aligned}$$