$$A = \begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix} \quad {}^tA = A.$$

3 変数の 2 次形式の正定値性

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$= ax^2 + by^2 + cz^2$$

$$+ 2pxy + 2qxz + 2ryz$$

対称行列 A が定める
2次形式.

Nobuyuki TOSE

Jan 05, 2020
V003 L14 Nov 06, 2020

$$\left[\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0 \\ \Downarrow \\ \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) > 0 \end{array}\right.$$

この条件.

復習

3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{R})$ が対称とします：${}^tA = A$
このとき (1)

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma) \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$$

(2) $\exists P \in O(3)$ が存在して

直交行列 $\quad P^{-1}AP =$

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

$P \in O(3)$

${}^tP = P^{-1}$

$\Downarrow$

${}^tP \in O(3)$

となる．さらに (3) 直交座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ によって

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2$$

$=$

となります．

$$\left({}^tPAP \cdot {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}\right)$$

$$P \in O(3) \iff (P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\forall \vec{v}, \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3)$$

$$\iff {}^tPP = P\,{}^tP = I_3$$

$$\iff P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$ とすると

$$\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = \|\vec{p}_3\| = 1$$

$$(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

2 次形式の正定値性 (0)—2 変数の場合の復習

2 次の実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

を満たすとします.（注意：このとき $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$）
このとき以下の定理が成立します.

定理 0

以下の条件 (i),(ii),(iii) は同値.

(i) $\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$ （A が定める 2 次形式は正定値）

(ii) $\alpha, \beta > 0$

(iii) $a > 0,\ |A| = ab - c^2 > 0$

2 次形式の正定値性 (1)

証明　$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \to \beta, \gamma > 0.$

定理

以下の条件 (i),(ii),(iii) は同値.

(i) $\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$　Aが定める2次形式は正定値.

(ii) $\alpha, \beta, \gamma > 0$

(iii) $A = \begin{pmatrix} a & p & q\\ p & b & r\\ q & r & c\end{pmatrix}$ のとき

$$a > 0, \ \begin{vmatrix} a & p\\ p & b\end{vmatrix} > 0, \ |A| > 0$$

${}^tPAP = \begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}$

$P \in O(3)$

✓ (i)⇒ (ii)

$\|\vec{p}_1\| = 1$

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2$$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$

$\xi = 1, \eta = 0, \zeta = 0$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{p}_1$ とおく　$\underbrace{(A\vec{p}_1, \vec{p}_1)}_{=\alpha} > 0 \leftarrow$ (i)　$\to \alpha > 0.$

2 次形式の正定値性 (2)

$\alpha, \beta, \gamma > 0$

$p, q, r \geq 0$ のとき　$p+q+r=0 \iff p=q=r=0$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow \bigcirc > 0$

✓ (ii) ⇒ (*i*)

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \underset{\underset{0}{\geq}}{\alpha\xi^2} + \underset{\underset{0}{\geq}}{\beta\eta^2} + \underset{\underset{0}{\geq}}{\gamma\zeta^2} \geq 0.$$

$\Updownarrow$

$\alpha\xi^2 = \beta\eta^2 = \gamma\zeta^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\xi = \eta = \zeta = 0 \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}$

正定値.

$a > 0$

(i) ⇒ (*iii*) $\cancel{a_{11} > 0}$ $A = \begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix}$ のとき

$z=0$ のとき

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = ax^2 + by^2 + \underbrace{cz^2}_{0} + 2pxy + \underbrace{2qxz}_{0} + \underbrace{2ryz}_{0}$$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ の場合

$$0 < \left(A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = a$$

2 次形式の正定値性 (3)

(i)$\Rightarrow$ (*iii*) $\begin{vmatrix} a & p \\ p & b \end{vmatrix} > 0$

$$ax^2 + 2pxy + by^2$$

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0$$

$0 \leftarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

$\begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}$ が定める 2次形式は正定値

$\Updownarrow$

$a > 0, \begin{vmatrix} a & p \\ p & b \end{vmatrix} > 0.$

(i)$\Rightarrow$(iii) $|A| > 0$

$\Updownarrow$

$\alpha, \beta, \gamma > 0$

$$|A| = |{}^tPAP| = \begin{vmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma > 0$$

$a>0$, $|\ \ |>0$, $|A|>0$

(iii)⇒ (i)

$\begin{vmatrix} a & p \\ p & b \end{vmatrix} = ab - p^2 > 0$

$2\, a \cdot \frac{p}{a} y \cdot \frac{q}{a} z = 2\frac{pq}{a} yz.$

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qxz + 2ryz$$

xに関する平方完成.

$$= a\left(x + \frac{p}{a}y + \frac{q}{a}z\right)^2$$
$$+ \left(b - \frac{p^2}{a}\right)y^2 + \left(c - \frac{q^2}{a}\right)z^2 + 2\left(r - \frac{pq}{a}\right)yz$$

y, z の 2次形式.

他方

$a>0$

$$0 < |A| = \begin{vmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & q \\ 0 & b - \frac{p^2}{a} & r - \frac{pq}{a} \\ 0 & r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b - \frac{p^2}{a} & r - \frac{pq}{a} \\ r - \frac{pq}{a} & c - \frac{q^2}{a} \end{vmatrix}$$

2行 ＝ 1行 × $(-\frac{p}{a})$, 3行 ＝ 1行 × $(-\frac{q}{a})$

2 次形式の正定値性 (5)

において $a > 0$, $|A| > 0$ から

$$\begin{vmatrix} b-\frac{p^2}{a} & r-\frac{pq}{a} \\ r-\frac{pq}{a} & c-\frac{q^2}{a} \end{vmatrix} > 0$$

さらに $\begin{vmatrix} a & p \\ p & b \end{vmatrix} = ab - p^2 > 0$ から

$$b - \frac{p^2}{a} = \frac{ab-p^2}{a} > 0$$

従って

$$\rightarrow \quad \left(\boxed{\begin{pmatrix} b-\frac{p^2}{a} & r-\frac{pq}{a} \\ r-\frac{pq}{a} & c-\frac{q^2}{a} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

と B.

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \overbrace{a\left(x+\frac{p}{a}y+\frac{q}{a}z\right)^2}^{\geq 0} + \underbrace{\left(B\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\right)}_{>0} > 0$$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ $(\Longleftrightarrow y \neq 0 \lor z \neq 0)$ のとき. > 0

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \underbrace{a(\quad)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(B\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\right)}_{\geq 0}$$

$y = z = 0$ $x \neq 0$ に注意!!

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \underset{\substack{\vee\\0}}{a}\, x^2 > 0$$