章末問題と解答

I 集合 X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$\text{(i) } A \subset B \Leftrightarrow \text{(ii) } A = A \cap B \Leftrightarrow \text{(iii) } B = A \cup B \tag{1.54}$$

II 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.55}$$

III 命題 P, Q, R に対して以下の同値式を示しましょう．

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.56}$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.57}$$

IV 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{1.58}$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \tag{1.59}$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \tag{1.60}$$

V 写像 $f\colon\ X \to Y$ が与えられているとき，X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \tag{1.61}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \tag{1.62}$$

VI 写像 $f\colon\ X \to Y$ と $g\colon\ Y \to Z$ が与えられているとき，以下を示しましょう．
(1) f, g が全射ならば $g \circ f$ も全射となる．
(2) f, g が単射ならば $g \circ f$ も単射となる．
(3) $g \circ f$ が全射ならば g も全射となる．
(4) $g \circ f$ が単射ならば f も単射となる．

VII 写像 $f\colon\ X \to Y$ が与えらているとします．Y の部分集合 B に対して X の部分集合

$$f^{-1}(B) := \{x \in X;\ f(x) \in B\}$$

を定義します（B の f による**逆像**と呼びます）．このとき Y の部分集合 B_1, B_2 に対して以下を示しましょう．

(1)

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(2)

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

I 集合 X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$\text{(i) } A \subset B \Leftrightarrow \text{(ii) } A = A \cap B \Leftrightarrow \text{(iii) } B = A \cup B \tag{1.63}$$

解答

(i)⇒(ii)

$$A \supset A \cap B$$

が常に成立しますから，$A \subset A \cap B$ を示せば $A = A \cap B$ を示すことができます．さらに $A \subset A$ かつ $A \subset B$ から

$$A \subset A \cap B$$

が従いますから[3]，(ii) が示せました．

(ii)⇒(i)

$$B \cap A \subset B$$

が常に成立しますから，$A = A \cap B \subset B$ から $A \subset B$ が従います．

(i)⇒(iii)

$$B \subset A \cup B$$

が常に成立しますから，$B \supset A \cup B$ を示せば $B = A \cup B$ が示せます．さらに $B \subset B$ かつ $A \subset B$ から $A \cup B \subset B$ が従いますから[4]，(iii) が示せました．

(iii)⇒(i)

$$A \subset A \cup B$$

が常に成立しますから

$$A \subset A \cup B = B$$

となりますから，$A \subset B$ が示せます．

II 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.64}$$

[3] $A, B, C \subset X$ のとき

$$(A \subset B \quad \text{かつ} \quad A \subset C) \quad \Rightarrow A \subset B \cap C$$

が成立することを用いています．

[4] $A, B, C \subset X$ のとき

$$(A \subset C \quad \text{かつ} \quad B \subset C) \quad \Rightarrow A \cup B \subset C$$

が成立することを用いています．

解答

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap x \in C) \vee (x \in A \cap x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

III 命題 P, Q, R に対して以下の同値式を示しましょう．

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.65}$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.66}$$

解答

P	Q	R	P∧Q	(P∧ Q)∨ R	P∨ R	Q∨ R	(P∨ R)∧(Q∨R)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

この真理表から (P, Q, R) の8通りの真偽の組み合わせにおいて $(P \wedge Q) \vee R$ と $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ の真偽がすべて一致しているので，

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.67}$$

であることが分かります．

P	Q	R	P∨Q	(P∨ Q)∧ R	P∧ R	Q∧ R	(P∧ R)∨(Q∧R)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

この真理表から (P, Q, R) の 8 通りの真偽の組み合わせにおいて $(P \vee Q) \wedge R$ と $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ の真偽がすべて一致しているので，

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.68}$$

であることが分かります．

IV 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{1.69}$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \tag{1.70}$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \tag{1.71}$$

解答

(1.69) について

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

(1.70) について

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C) \end{aligned}$$

ここで命題 P, Q, R に対して

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

が成立することを用いています[5]．

(1.71) について

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{aligned}$$

[5] この結果があるのでこの両辺にある命題を $P \wedge Q \wedge R$ と記していいことが分かる．

V 写像 $f\colon\ X \to Y$ が与えられているとき，X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \tag{1.72}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \tag{1.73}$$

解答

(1.72) について

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) \ &\Leftrightarrow\ \exists x \in A \cup B\ y = f(x) \\ &\Leftrightarrow\ (\exists x \in A\ y = f(x)) \vee (\exists x \in B\ y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow\ y \in f(A) \vee y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

上で以下を用いていることに注意しましょう．

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ と X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して

$$\exists x \in A \cup B\ \ (P(x)) \equiv (\exists x \in A(P(x))) \vee (\exists x \in B(P(x)))$$

が成立します．

これがすぐ見えたら以下の説明は不要ですが，少し解説しましょう．

まず集合 X 上の命題関数 $P(x)$ と $Q(x)$ に対して

$$\exists x \in X\ \ (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x \in X\ \ (P(x))) \vee (\exists x \in X\ \ (Q(x)))$$

が成立することに注意しましょう．また X の部分集合 A に対して

$$\exists x \in A\ (P(x)) \equiv \exists x \in X\ (x \in A \wedge P(x))$$

も成立します．これを用いると

$$\begin{aligned} \exists x \in A \cup B\ (P(x)) \ &\equiv\ \exists x \in X\ \ (x \in A \cup B \wedge P(x)) \\ &\equiv\ \exists x \in X\ \ ((x \in A \vee x \in B) \wedge P(x)) \\ &\equiv\ \exists x \in X\ \ ((x \in A \wedge P(x)) \vee (x \in B \wedge P(x))) \\ &\equiv\ \exists x \in X\ \ (x \in A \wedge P(x)) \vee \exists x \in X\ \ (x \in B \wedge P(x)) \\ &\equiv\ (\exists x \in A\ (P(x))) \vee (\exists x \in B\ (P(x))) \end{aligned}$$

が導けます．

(1.73) について

まず以下の (1.74) を示します．

X の部分集合 $A_1, A_2 \subset X$ に対して

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2) \tag{1.74}$$

が成立します．

実際

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) &\Leftrightarrow \exists x \in A_1 \ y = f(x) \\ &\underset{(*)}{\Rightarrow} \exists x \in A_2 \ y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(A_2) \end{aligned}$$

と示せます．ここで (*) において以下を用いています．

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ が与えられているときに X の部分集合 A, B が $A \subset B$ を満たすならば

$$(\exists x \in A \ \ (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in B \ \ (P(x)))$$

が常に成立します．

最後に (1.73) を示します．

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$$

が常に成立しますから

$$f(A \cap B) \subset f(A), \quad f(A \cap B) \subset f(B)$$

が (1.74) を用いると導けます．これから

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

であることが従います．

VI 写像 $f\colon\ X \to Y$ と $g\colon\ Y \to Z$ が与えられているとき，以下を示しましょう．
(1) f, g が全射ならば $g \circ f$ も全射となる．
(2) f, g が単射ならば $g \circ f$ も単射となる．
(3) $g \circ f$ が全射ならば g も全射となる．
(4) $g \circ f$ が単射ならば f も単射となる．

解答

(1) 任意の $z \in Z$ をとります．g が全射なので $\exists y \in Y$ が存在して

$$z = g(y)$$

が成立します．f が全射なので，この $y \in Y$ に対して $\exists x \in X$ が存在して

$$y = f(x)$$

が成立します．このとき

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

が成立します．よって $g \circ f$ は全射であることが分かります．

(2) $x, x' \in X$ に対して

$$g \circ f(x) = g \circ f(x') \quad \text{すなわち} \quad g(f(x)) = g(f(x'))$$

が成立するとします．g が単射なので

$$f(x) = f(x')$$

が成立します．さらに f が単射なので

$$x = x'$$

が従います．よって $g \circ f$ は単射であることが分かります．

(3) $g \circ f$ が全射なので $\forall z \in Z$ に対して $\exists x \in X$ が存在して

$$z = g \circ f(x) = g(f(x))$$

が成立します．ここで $f(x) \in Y$ なので g が全射であることが分かります．

(4) $x, x' \in X$ に対して $f(x) = f(x')$ が成立すると仮定します．このとき

$$g(f(x)) = g(f(x')) \quad \text{すなわち} \quad g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

が従います．ここで $g \circ f$ が単射であることを用いると

$$x = x'$$

となります．よって f は単射であることが示されました．

VII 写像 $f\colon\ X \to Y$ が与えられているとします．Y の部分集合 B に対して X の部分集合

$$f^{-1}(B) := \{x \in X;\ f(x) \in B\}$$

を定義します（B の f による逆像と呼びます）．このとき Y の部分集合 B_1, B_2 に対して以下を示しましょう．

(1)

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(2)

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

解答 (1)

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow\ f(x) \in B_1 \cup B_2 \\
&\Leftrightarrow\ f(x) \in B_1\ \vee\ f(x) \in B_2 \\
&\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(B_1)\ \vee\ x \in f^{-1}(B_2) \\
&\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow\ f(x) \in B_1 \cap B_2 \\
&\Leftrightarrow\ f(x) \in B_1\ \wedge\ f(x) \in B_2 \\
&\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(B_1)\ \wedge\ x \in f^{-1}(B_2) \\
&\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)
\end{aligned}
$$

演習 1.1

P_1	P_2	$P_1 \Longleftrightarrow P_2$	$P_1 \Rightarrow P_2$	$P_2 \Rightarrow P_1$	$(P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

から

$$P_1 \Leftrightarrow P_2 \equiv (P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$$

が示されました．

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$\neg(P_1 \wedge P_2)$	$\neg(P_1)$	$\neg(P_2)$	$\neg(P_1) \vee \neg(P_2)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

から

$$\neg(P_1 \wedge P_2) \equiv \neg(P_1) \vee \neg(P_2)$$

が分かります．

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$	$\neg(P_1 \vee P_2)$	$\neg(P_1)$	$\neg(P_2)$	$\neg(P_1) \wedge \neg(P_2)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

から

$$\neg(P_1 \vee P_2) \equiv \neg(P_1) \wedge \neg(P_2)$$

が分かります．

演習 1.2

(1.4)

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

から

$$\text{（交換則）}\qquad P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad P \vee Q \equiv Q \vee P$$

が分かります.

<u>(1.5)</u>

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

から

$$(P\wedge) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

であることが分かります．他方

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

から

$$(P\vee) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

であることが分かります.

(1.6), (1.7) は章末問題 III です.

演習 1.3

P	$\neg(P)$	$\neg(\not(P))$
T	F	T
F	T	F

から 2 重否定の法則

$$\neg(\neg(P)) \equiv P$$

が成立することが分かります.

演習 1.4

P	Q	$P \vee Q$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

から

$$P \Rightarrow (P \vee Q)$$

がトートロジーであることが分かります.

演習 1.5 (1.13)

P	$P \Rightarrow P$
T	T
F	T

から

$$P \Rightarrow P$$

がトートロジーであることが分かります（同一律）.
(1.15)

P	$\neg(P)$	$P \wedge \neg(P)$	$\neg(P \wedge \neg(P))$
T	F	F	T
F	T	F	T

から

$$\neg(P \wedge \neg(P))$$

がトートロジーであることが分かります（矛盾律）.

演習 1.6

$$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \tag{1.75}$$

の真偽について真理表を作ります．

P	Q	R	$*_1 := (Q \Rightarrow R)$	$*_2 := (P \Rightarrow *_1)$	$*_3 := P \Rightarrow Q$	$*_2 \wedge *_3$	$P \Rightarrow R$	(1.75)
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

から (1.75) がトートロジーであることが分かります．
　または以下のように同値式として変形して示すこともできます．

$$
\begin{aligned}
\text{（与式）} &\overset{(*)}{\equiv} [P \Rightarrow \{Q \wedge (Q \to R)\} \Rightarrow (P \Rightarrow Q)] \\
&\overset{(**)}{\equiv} [P \to (Q \wedge R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
&\equiv [(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
&\equiv \neg\,(P \Rightarrow Q) \vee \neg\,(P \Rightarrow R) \vee (P \Rightarrow R)
\end{aligned}
$$

において最右辺はトートロジーとなります．実際，命題 Q,R に対して

$$Q \vee \neg(R) \vee R$$

は任意の Q に対して真になります．以上で与式がトートロジーであることが分かります．
　上で (*) において，同値式

$$(P \Rightarrow Q_1) \wedge (P \Rightarrow Q_2) \equiv (P \Rightarrow (Q_1 \wedge Q_2))$$

が成立することを，(**) において同値式

$$Q \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv Q \wedge R$$

が成立することを用いていることに注意しましょう．

演習 1.7

P	Q	R	$\#_1 := (P \Rightarrow Q)$	$\#_2 := (Q \Rightarrow R)$	$\#_1 \wedge \#2$	$P \Rightarrow R$	(1.21)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

から (1.21) がトートロジーであることが分かります．

演習 1.8 章末問題 II です．

演習 1.9 章末問題 IV にあります．

演習 1.10

$$x \in A_1 \Rightarrow x \in A_2$$

が成立するとき

$$(x \in A_1 \wedge x \notin B) \Rightarrow (x \in A_2 \wedge x \notin B)$$

が成立します．これが

$$A_1 \subset A_2 \quad \text{ならば} \quad A_1 \setminus B \subset A_2 \setminus B$$

を意味します．他方

$$x \in B_1 \Rightarrow x \in B_2$$

が成立するとき

$$x \notin B_2 \Rightarrow x \notin B_1$$

が成立します．このとき

$$(x \notin B_2 \wedge x \in A) \Rightarrow (x \notin B_1 \wedge x \in A)$$

が従いますが，これは

$$B_1 \subset B_2 \quad \text{ならば} \quad A \setminus B_2 \subset A \setminus B_1$$

を意味します．以上で

> 命題 P_1, P_2, Q に対して
>
> $$(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow ((P_1 \wedge Q) \Rightarrow (P_2 \wedge Q))$$
>
> がトートロジーである

ことを用いています．

演習 1.11

$$x \in A \cap A^c \equiv x \in A \wedge x \in A^c \equiv x \in A \wedge \neg (x \in A)$$

から任意の xnX に対して $x \in A \cap A^c$ は偽となりますから

$$A \cap A^c = \emptyset$$

であることが分かります．

$$x \in A \vee x \notin A \equiv x \in A \vee \neg (x \in A)$$

からすべての $x \in X$ に対して $x \in A \vee x \notin A$ が成立します．よって

$$A \cup A^c = X$$

であることが分かります．次に

$$\begin{aligned} x \in (A^c)^c &\equiv x \notin A^c \equiv \neg (x \in A^c) \equiv \neg (x \notin A) \\ &\equiv \neg (\neg A \in A) \equiv A \in A \end{aligned}$$

から

$$(A^c)^c = A$$

であることが分かります．最後に

$$(x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \equiv (x \in B^c \Rightarrow x \in A^c)$$

から

$$A \subset \Rightarrow B^c \Rightarrow A^c$$

であることが分かります．

演習 1.12 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ f(x) &= (h \circ g) (f(x)) \\ &= h (f (g(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) (x) &= h (g \circ f(x)) \\ &= h (g (f(x))) \end{aligned}$$

から

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f) (x)$$

であることが分かります．これは

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

を意味します．

演習 1.13 例えば $X = \mathbf{R}$ 上の命題関数

$$P(x): \quad x > -1$$

$$Q(x): \quad x < 1$$

が反例となります．

演習 1.14

$$\begin{aligned}\exists x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) &\equiv \exists x \in X\,(\neg(P(x)) \vee Q(x))\\ &\equiv \exists x \in X\,(\neg(P(x))) \vee \exists x \in X\,(Q(x))\\ &\equiv (\forall x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X\,(Q(x)))\end{aligned}$$

演習 1.15

$$\begin{aligned}(1.47) &\overset{(*)}{\equiv} \neg\,(\exists x \in X\,(P(x)) \wedge \exists x \in X\,(Q(x))) \Rightarrow \neg\,(\exists x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)))\\ &\overset{(**)}{\equiv} (\forall x \in X\,(\neg P(x)) \vee \forall x \in X\,(\neg Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X\,((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x)))\end{aligned}$$

において，(1.45) から最右辺が真であることが分かりますから，(1.47) が真であることが従います．

演習 1.16

$$\begin{aligned}&\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X\,(Q(x))))\\ &\overset{(i)}{\equiv} (\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \in X\,(P(x))) \Rightarrow \forall x \in X\,(Q(x))\\ &\equiv \forall x \in X\,((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (P(x))) \Rightarrow \forall x \in X\,(Q(x))\\ &\overset{(ii)}{\equiv} \forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X\,(Q(x))\\ &\equiv (\forall x \in X(P(x)) \wedge \forall x \in X(Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X(Q(x))\end{aligned}$$

となります．最右辺が常に真となるのは，一般に命題 P, Q に対して

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

が常に真となることから容易に示せます．上で (i) は同値式

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R \tag{1.76}$$

を用いました．他方 (ii) では恒等式

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q \tag{1.77}$$

を用いました．

演習 1.17 同値式

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X\,(Q(x))))\\
&\equiv \forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\neg\,(\exists x \in X\,(Q(x)))) \Rightarrow (\neg\,(\exists x \in X\,(P(x)))))\\
&\equiv \forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(P(x)))\\
&\equiv (\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \in X \neg\,(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(P(x)))\\
&\equiv \forall x \in X\,((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\,(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(P(x)))\\
&\equiv \forall x \in X\,((\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)) \wedge \neg\,(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(P(x)))\\
&\equiv \forall x \in X\,((\neg Q(x)) \wedge (\neg P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(P(x)))\\
&\equiv (\forall x \in X(\neg Q(x)) \wedge \forall x \in X(\neg P(x))) \Rightarrow \forall x \in X(\neg P(x))
\end{aligned}
$$

の最右辺が常に真であることが容易に示せます．

演習 1.18 右の表から

$$
\begin{aligned}
\forall y \in Y\,\left(x^2 + y < 20\right) &\equiv (x = 1, 2, 3)\\
\exists y \in Y\,\left(x^2 + y < 20\right) &\equiv (x = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
$$

であることが分かります．従って各命題の真偽が以下のように求められます．

(1) $\forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv F$
(2) $\forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv F$
(3) $\exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv T$
(4) $\exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv T$

$y \backslash x$	1	2	3	4	5
1	2	5	10	17	26
2	3	6	11	18	27
3	4	7	12	19	28
4	5	8	13	20	29
5	6	9	14	21	30

演習 1.19 (1)

$$\neg\left(\forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)\right) \exists x \in X \exists y \in Y\,\left(x^2 + y \geq 20\right)$$

(2)

$$\neg\left(\forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)\right) \exists x \in X \forall y \in Y\,\left(x^2 + y \geq 20\right)$$

(3)

$$\neg\left(\exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)\right) \forall x \in X \exists y \in Y\,\left(x^2 + y \geq 20\right)$$

(4)

$$\neg\left(\exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)\right) \forall x \in X \forall y \in Y\,\left(x^2 + y \geq 20\right)$$