第1章　形式論理，集合，写像

1.1　命題

命題とは真 (True) か偽 (False) がはっきりしている文のことです．

$$1 < 2$$

は真であり

$$1 > 2$$

は偽です．

P_1 と P_2 が命題であるとします．P_1 かつ P_2 ($P_1 \wedge P_2$) が真であるのは P_1 と P_2 の両方が真のときです．このことを真理表 (真偽表) (truth table) と呼ぶ次の表で表します．

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P_1 または $P_2 (P_1 \vee P_2)$ が真であるのは P_1 と P_2 のどちらか少なくとも一方が真のときです．真理表では次のようになります．

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P_1 の否定 $\neg(P_1)$ が真となるのは P_1 が偽であるときです．真理表では次のようになります．

P_1	$\neg(P_1)$
T	F
F	T

となります．

P_1 ならば P_2 ($P_1 \Rightarrow P_2$) が偽であるのは P_1 が真であってかつ P_2 が偽であるときで，その他の場合は真となります．真理表では

P_1	P_2	$P_1 \Longrightarrow P_2$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

となります．

P_1 と P_2 が**同値**であるという命題 $P_1 \Leftrightarrow P_2$ は P_1 と P_2 の真偽が一致するとき真になります．真理表では

P_1	P_2	$P_1 \Longleftrightarrow P_2$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

となります．

1.2 論理式，同値式，トートロジー

命題 P_1, P_2, $\cdots$ を $\wedge$, $\vee$, $\neg(\cdot)$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ を用いて組み合わせてできる命題を**論理式**と呼びます[1]．例えば

$$L_1(P_1, P_2) := (P_1 \Longrightarrow P_2)$$

$$L_2(P_1, P_2) := (\neg(P_2) \Rightarrow \neg(P_1))$$

$$L_3(P_1, P_2) := (\neg(P_1) \vee P_2)$$

と定めましょう．L_2 と L_3 の P_1, P_2 の真偽の取り方による真偽の値を計算します．まず L_2 について考えると

P_1	P_2	$\neg(P_1)$	$\neg(P_2)$	$\neg(P_2) \Longrightarrow \neg(P_1)$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

となります．次に L_3 の値は

[1] $\wedge$, $\vee$, $\neg(\cdot)$, を使うだけでよいことが以下で示されます．

P_1	P_2	$\neg(P_1)$	$\neg(P_1) \vee P_2$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

となります．以上で $L_1(P_1, P_2)$, $L_2(P_1, P_2)$, $L_3(P_1, P_2)$ は常に同一の真偽値をとることが分かりました．これをもって

$$L_1(P_1, P_2) \equiv L_2(P_1, P_2) \equiv L_3(P_1, P_2)$$

と記します．L_1, L_2, L_3 は**同値式**であるといいます．また，$P_1 \Rightarrow P_2$ に対して $\neg(P_2) \Rightarrow \neg(P_1)$ をその**対偶** (contraposition) と呼びます．

演習 1.1. 以下の同値式を示しましょう．

$$(P_1 \Leftrightarrow P_2) \equiv ((P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)) \tag{1.1}$$

$$\text{（ド・モルガンの法則）}\quad \neg(P_1 \wedge P_2) \equiv (\neg(P_1) \vee \neg(P_2)) \tag{1.2}$$

$$\text{（ド・モルガンの法則）}\quad \neg(P_1 \vee P_2) \equiv (\neg(P_1) \wedge \neg(P_2)) \tag{1.3}$$

注意 以下の同値式はより基本的です．

$$\text{（交換則）}\qquad P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad P \vee Q \equiv Q \vee P \tag{1.4}$$

$$\text{（結合則）}\qquad (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R), \quad (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \tag{1.5}$$

$$\text{（分配則）}\qquad (P \wedge Q) \vee R \ \equiv\ (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.6}$$

$$\text{（分配則）}\qquad (P \vee Q) \wedge R \ \equiv\ (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.7}$$

結合則 (1.5) があるので，(1.5) にある命題をそれぞれ

$$P \wedge Q \wedge R, \quad P \vee Q \vee R$$

と表記しても紛れることがないことに注意しましょう．

演習 1.2. (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) を証明しましょう．

注意 以下の同値式も基本的です．

$$\text{（2 重否定の法則）}\quad \neg(\neg(P)) \equiv P \tag{1.8}$$

演習 1.3. (1.8) を示しましょう．

次に論理式

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P \tag{1.9}$$

を考えます．真理表

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

から分かるように P, Q の真偽値によらず真となります．このような論理式を**トートロジー** (tautology) あるいは**恒真式**と呼びます．このトートロジー $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ ですが，同値式として

$$\begin{aligned}(P \wedge Q) \Rightarrow P &\equiv \neg\,(P \wedge Q) \vee P \\ &\equiv (\neg(P) \vee \neg(Q)) \vee P \\ &\equiv (P \vee \neg(P)) \vee \neg(Q)\end{aligned}$$

と変形できます．より一般に

$$(P \vee \neg(P)) \vee Q \tag{1.10}$$

はトートロジーになりますから

$$(P \vee \neg(P)) \vee \neg(Q) \quad \text{従って} \quad (P \wedge Q) \Rightarrow P$$

がトートロジーであることが示されます．(1.10) がトートロジーであるのは真理表

P	Q	$\neg(P)$	$P \vee \neg(P)$	$(P \vee \neg(P)) \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

から分かります．この真理表から

$$\text{（排中律）} \quad P \vee \neg(P) \tag{1.11}$$

がトートロジーであることが分かります．

演習 1.4. 論理式

$$P \Rightarrow (P \vee Q) \tag{1.12}$$

がトートロジーであることを示しましょう．

上で掲げた排中律 (1.11) を含めて，基本的なトートロジーを列挙しておきましょう．

$$\text{（同一律）}\quad P \Rightarrow P \tag{1.13}$$

$$\text{（排中律）}\quad P \vee \neg(P) \tag{1.14}$$

$$\text{（矛盾律）}\quad \neg\,(P \wedge \neg(P)) \tag{1.15}$$

演習 1.5. (1.13),(1.15) がトートロジーであることを示しましょう．

最後に論理式

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P \tag{1.16}$$

がトートロジーであることを示しましょう（このことを**パースの法則**と呼びます）．

$$\begin{aligned}((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P &\equiv \neg\,((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \vee P \\ &\equiv \neg\,(\neg\,(\neg(P) \vee Q) \vee P) \vee (P) \\ &\equiv ((\neg(P) \vee Q) \wedge \neg(P)) \vee P \\ &\equiv (\neg(P) \vee Q \vee P) \wedge (\neg(P) \vee P) \\ &\equiv ((\neg(P) \vee P) \vee Q) \wedge (\neg(P) \vee P)\end{aligned}$$

において $(\neg(P) \vee P) \vee Q$ と $(\neg(P) \vee P)$ がトートロジーなので，最右辺がトートロジーであることが分かります．よって (1.16) がトートロジーであることが従います．

演習 1.6.

$$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \tag{1.17}$$

がトートロジーであることを示しましょう．

1.3　命題関数

X を集合とします．$x \in X$ に依存する命題を**命題関数**と呼びます．例えば $X = \mathbb{R}$ のとき

$$P(x) := (x > 1)$$

$$Q(x) := (x \leq 1)$$

は $\mathbb{R}$ 上で定義される命題関数です．一般に $P(x)$ を X 上の命題関数とするとき，すべての $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題を

$$\forall x \in X \quad [P(x)]$$

と記します．他方，ある $x \in X$ に対して $P(x)$ が成立するという命題を

$$\exists x \in X \quad [P(x)]$$

と記します[2]．

以下の公式

$$\neg\,(\forall x \in X \quad [P(x)]) \equiv (\exists x \in X \quad \neg\,(P(x))) \tag{1.18}$$

$$\neg\,(\exists x \in X \quad [P(x)]) \equiv (\forall x \in X \quad \neg\,(P(x))) \tag{1.19}$$

は重要です．

1.4　集合

1.4.1　包含関係

以下では集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ を考えます．

1.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \quad \wedge \quad B \subset A$$

2.

$$\neg\,(A \subset B) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in A\,(x \notin B)$$

注意

$$A \subset B \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x \in A\,(x \in B)$$

さらにこの条件は

$$\forall x \in X\,(x \in A \ \Rightarrow x \in B)$$

と同値であることにも注意しましょう．

3.

$$(A \subset B \quad \wedge \quad B \subset C) \quad \Rightarrow \quad A \subset C \tag{1.20}$$

(1.20) は命題 P, Q, R に対して，論理式

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \tag{1.21}$$

がトートロジーであることから導かれます．実際，$x \in X$ に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

が常に成立することから (1.20) が成立することが分かります．

[2] $\forall$ は all, any の A, $\exists$ は exist の E が由来である．

演習 1.7. (1.21) を真理表を用いて証明しましょう．

4.
$$(A \subset B \quad \wedge \quad A \subset C) \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \cap C \tag{1.22}$$

(1.22) を証明する前に
$$B \cap C \subset B, \quad B \cap C \subset C$$
が常に成立することに注意しましょう．例えば $B \cap C \subset B$ ですが，$x \in X$ に対して
$$(x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow x \in B$$
がトートロジーであることから従います（(1.9) 参照）．

以上の注意をもとに (1.22) を証明しましょう．

($\Leftarrow$) $A \subset B \cap C$, $B \cap C \subset B$ から $A \subset B$ が従います．同様に $A \subset B \cap C$, $B \cap C \subset C$ から $A \subset C$ が従います．

($\Rightarrow$) $\forall x \in A$ をとると，$x \in B$ かつ $x \in C$ が成立しているが，このとき $x \in B \cap C$ が従う．以上で $A \subset B \cap C$ が導かれました．

実は (1.22) は，命題 P, Q, R に対して同値式
$$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \equiv P \Rightarrow (Q \wedge R) \tag{1.23}$$
が成立することから直接導くことができます．実際 $x \in X$ に対して
$$((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \Rightarrow x \in C)) \equiv (x \in A \Rightarrow (x \in B \wedge x \in C))$$
が (1.22) に他なりません．また (1.23) は
$$\begin{aligned}(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) &\equiv (\neg(P) \vee Q) \wedge (\neg(P) \vee R) \\ &\equiv \neg(P) \vee (Q \wedge R) \\ &\equiv P \Rightarrow (Q \wedge R)\end{aligned}$$
と証明できます．

5.
$$(A \subset C \quad \wedge \quad B \subset C) \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B \subset C \tag{1.24}$$

(1.24) を証明する前に
$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B$$

が常に成立することに注意しましょう．例えば $A \subset A \cup B$ ですが，$x \in X$ に対して

$$x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

がトートロジーであることから従います（(1.12) 参照）．

次に (1.24) を証明しましょう．

($\Leftarrow$) $A \subset A \cup B$, $A \cup B \subset C$ から $A \subset C$ が従います．同様に $B \subset A \cup B$, $A \cup B \subset C$ から $B \subset C$ が従います．

($\Rightarrow$)

$$\forall x \in A \quad \text{に対して} \quad x \in C$$

$$\forall x \in B \quad \text{に対して} \quad x \in C$$

が成立するとします．このとき $x \in A \cup B$ が成立しているとします．すると

$$x \in A \quad \vee \quad x \in B$$

が従います．$x \in A$ ならば $x \in C$, $x \in B$ ならば $x \in C$ となりますから，$x \in C$ であることが分かります．これは

$$A \cup B \subset C$$

が成立することを意味します．

実は (1.24) は，命題 P, Q, R に対して同値式

$$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R \tag{1.25}$$

が成立することから直接導くことができます．実際 $x \in X$ に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in C) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \equiv (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in C$$

が (1.24) に他なりません．また (1.25) は

$$\begin{aligned}(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) &\equiv (\neg(P) \vee R) \wedge (\neg(Q) \vee R)\\ &\equiv (\neg(P) \wedge \neg(Q)) \vee R\\ &\equiv \neg(P \wedge Q) \vee R\\ &\equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R\end{aligned}$$

と証明できます．

6. （分配法則）

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{1.26}$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.27}$$

(1.26) を示します．

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow\ x \in A \cap B \quad \vee \quad x \in C \\ &\Leftrightarrow\ (x \in A \quad \wedge \quad x \in B) \quad \vee \quad x \in C \\ &\Leftrightarrow\ (x \in A \quad \vee \quad x \in C) \quad \wedge \quad (x \in B \quad \vee \quad x \in C) \\ &\Leftrightarrow\ x \in A \cup C \quad \wedge \quad x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow\ x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

演習 1.8. (1.27) を証明しましょう．

注意 上で (1.26) を示すために (1.6) すなわち

$$(P \wedge Q) \vee R\ \equiv\ (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.28}$$

を用いました．また (1.27) を示すには (1.7) すなわち

$$(P \vee Q) \wedge R\ \equiv\ (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.29}$$

を用います．

注意　以下の基本的な等式があります．

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \tag{1.30}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{1.31}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{1.32}$$

1.4.2　差集合・補集合

$A, B, C \subset X$ とします．このとき X の部分集合

$$A \setminus B := \{x \in X;\ x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}$$

を定義します．

1. （ド・モルガン則）

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \tag{1.33}$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{1.34}$$

(1.33) を示します.

$$
\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \notin (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad \neg (x \in B \quad \vee \quad x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (x \notin B \quad \wedge \quad x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \notin B) \quad \wedge \quad (x \in A \quad \wedge \quad x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \quad \wedge \quad x \in A \setminus C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)
\end{aligned}
$$

演習 1.9. (1.34) を示しましょう.

演習 1.10. A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 は集合 X の部分集合とします．以下を示しましょう.

$$A_1 \subset A_2 \quad \text{ならば} \quad A_1 \setminus B \subset A_2 \setminus B$$

$$B_1 \subset B_2 \quad \text{ならば} \quad A \setminus B_2 \subset A \setminus B_1$$

さらに

$$A^c := X \setminus A$$

と定義して A の**補集合**と呼びます．上の (1.33), (1.34) から次の (1.35), (1.36) が従います.

2.（ド・モルガン則）

$$(B \cup C)^c = B^c \cap C^c \tag{1.35}$$

$$(B \cap C)^c = B^c \cup C^c \tag{1.36}$$

最後に補集合について基本的な性質をまとめましょう.

3. A, B が集合 X の部分集合であるとき，以下が成立します.

$$A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = X \tag{1.37}$$

$$(A^c)^c = A \tag{1.38}$$

$$A \subset B \quad \text{ならば} \quad B^c \subset A^c \tag{1.39}$$

演習 1.11. (1.37),(1.38), (1.39) を証明しましょう.

1.4.3　直積集合

X と Y, Z を集合とします．このとき

$$X \times Y := \{(x, y);\ x \in X,\ y \in Y\}$$

$$X \times Y \times Z := \{(x, y, z);\ x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z\}$$

を**直積集合**と呼びます．例えば 2 次元列ベクトル全体の集合

$$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

に対して

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 := \{(\vec{x}, \vec{y});\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2\}$$

と 2 本の 2 次元列ベクトルの順列全体の集合が定まります．このとき

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

に注意しましょう．

3 次元列ベクトル全体の集合

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

に対して

$$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 := \{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z});\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^3\}$$

と 3 本の 3 次元列ベクトルの順列全体の集合が定まります．

1.5　写像

X, Y 集合として写像

$$f:\ X \to Y$$

が与えられているとします．このとき X を**定義域**, Y を**値域**（終域）と呼びます．
注意 $f:\ X \to X$ を X 上の**変換**と呼びます．

1. （像，グラフ）$A \subset X$ に対して Y の部分集合

$$f(A) := \{f(a) \in Y;\ a \in A\}$$

を A の f による**像**と呼びます．

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y;\ x \in X\}$$

を f の**グラフ**と呼びます．

2. （合成）Z を集合として写像

$$g\colon\ Y \to Z$$

を考えます．このとき

$$g \circ f\colon\ X \to Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

を f と g の**合成**と呼びます．

3. （写像の合成に関する結合則）

さらに集合 W と写像

$$h\colon\ Z \to W$$

があるとき

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{1.40}$$

が成立します．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rrr, bend left=60, "h \circ (g \circ f)"] \arrow[rrr, bend right=60, "(h \circ g) \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & W
\end{tikzcd}$$

演習 1.12. (1.40) を示しましょう．

4. （逆写像）写像 $f\colon\ X \to Y$ に対して

$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y \tag{1.41}$$

を満たす g を f の**逆写像**と呼びます．

逆写像は存在すれば一意的に定まります．すなわち 2 つの写像

$$g_1 \colon Y \to X, \quad g_2 \colon Y \to X$$

が

$$g_1 \circ f = id_X,\ f \circ g_1 = id_Y,\ g_2 \circ f = id_X,\ f \circ g_2 = id_Y$$

を満たすならば $g_1 = g_2$ が成立します．実際

$$g_2 = id_X \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ id_Y = g_1$$

からこのことは証明できます．この一意性から f の逆写像を

$$f^{-1} \colon Y \to X$$

と記します.

5. （全射）写像 $f \colon X \to Y$ に対して

$$f(X) = Y$$

が成立するとき，すなわち

$$\forall y \in Y \text{ に対して} \exists x \in X \text{が存在して} f(x) = y$$

が成立するとき，f は**全射**であるといいます.

定理 1.1. ある写像 $g \colon Y \to X$ が

$$f \circ g = id_Y$$

を満たせば，f は全射となります.

証明 任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(g(y))$$

が成立しますから，f が全射であることが分かります.

6. （単射）写像 $f \colon X \to Y$ に対して

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

が成立するとき，f は**単射**であるといいます.

定理 1.2. ある写像 $g\colon\ Y \to X$ が
$$g \circ f = id_X$$
を満たせば，f は単射となります．

証明 $f(x) = f(x')$ とすると
$$g \circ f(x) = g \circ f(x')$$
から
$$x = x'$$
が従います．

7. （全単射） 写像 $f\colon\ X \to Y$ が全射でかつ単射であるとき f を**全単射**と呼びます．

定理 1.1 と定理 1.2 から次の定理 1.3 が従います．

定理 1.3. $f : X \to Y$ に逆写像 $g\colon\ Y \to X$ が存在すれば f は全単射であることが従います．

定理 1.3 の逆が成立します．

定理 1.4. 写像 $f\colon\ X \to Y$ が全単射ならば，f には逆写像が存在します．

証明 逆写像 $g\colon\ Y \to X$ を構成します．
任意の $y \in Y$ を考えます．f は全射ですから
$$y = f(x)$$
を満たす $x \in X$ が存在します．しかもこの条件を満たす $x \in X$ はただ一つ存在します．実際 f は単射ですから
$$f(x) = f(x') \quad \text{から} \quad x = x'$$
が従うからです．この状況で
$$g(y) := x$$
と定義します．この式において $x = f(x)$ を代入すると
$$y = f(g(y))$$
が成立することが分かります．y は任意でしたから
$$f \circ g = id_Y \tag{1.42}$$

が成立することを示しました．

次に
$$g \circ f = id_X \tag{1.43}$$
が成立することを示します．そのために任意の $x \in X$ を考えます．$y = f(x)$ と定めると g の定義から $g(y) = x$ となりますから
$$g(f(x)) = x$$
が従います．x は任意ですから (1.43) が示されました．

1.6　補足–論理式，同値式，トートロジー

1.6.1　補足–命題関数（1 変数）

集合 X 上定義された命題関数 $P(x)$,$Q(x)$ を考えます．このとき同値式

$$\forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x \in X\,(P(x))) \wedge (\forall x \in X\,(Q(x))) \tag{1.44}$$

が成立します．実際，任意の $x \in X$ に対して

$$P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow P(x), \quad P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow Q(x)$$

はそれぞれトートロジーですから

$$\forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X\,(P(x))\,, \quad \forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X\,(Q(x))\,,$$

が成立します．よって

$$\forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X\,(P(x))) \wedge (\forall x \in X\,(Q(x)))$$

が成立します．逆に

$$\forall x \in X\,(P(x)) \quad \text{と} \quad \forall x \in X\,(Q(x))$$

が成立しているとします．このとき任意の $x \in X$ に対して $P(x)$ と $Q(x)$ が成立しますから，$P(x) \wedge Q(x)$ が成立します．よって

$$\forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x))$$

が成立することが分かりました．

次に

$$(\forall x \in X\,(P(x))) \vee (\forall x \in X\,(Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X\,(P(x) \vee Q(x)) \tag{1.45}$$

が成立することを示しましょう．実際，任意の $x \in X$ に対して

$$P(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x))\,, \quad \text{および} \quad Q(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x))$$

がトートロジーです．従って

$$\forall x \in X\,(P(x)) \Rightarrow \forall x \in X\,(P(x) \vee Q(x))$$

$$\forall x \in X\,(Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X\,(P(x) \vee Q(x))$$

が成立します．一般にトートロジー

$$(P_1 \Rightarrow P_3) \vee (P_2 \Rightarrow P_3) \Rightarrow ((P_1 \vee P_2) \Rightarrow P_3)$$

が成立することを用いると (1.45) が従います．

演習 1.13. (1.45) の逆，すなわち

$$\forall x \in X\,(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X\,(P(x))) \vee (\forall x \in X\,(Q(x)))$$

が成立しないことを示しましょう．

さらに (1.44), (1.45) と関係する同値式，トートロジーを紹介します．

$$\exists x \in X\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x \in (P(x))) \vee (\exists x \in (Q(x))) \tag{1.46}$$

(⇒) (1.46) の左辺が成立するとします．すなわち，ある $a \in X$ に対して $P(a) \vee Q(a)$ が成立するとします．このとき $P(a)$ が真であるか，または $Q(a)$ が真となります．$P(a)$ が真ならば，$\exists x \in X\,(P(x))$ が真となります．他方 $Q(a)$ が真ならば，$\exists x \in X\,(Q(x))$ が真となります．従っていずれの場合も

$$\exists x \in X\,(P(x)) \vee \exists x \in X\,(Q(x))$$

が真となります．
(⇐) (1.46) の右辺が成立するとします．$\exists x \in (P(x))$ が真ならばある $a \in X$ に対して $P(a)$ が真となります．このとき $P(a) \vee Q(a)$ が真となりますから，$\exists x \in X\,(P(x) \vee Q(x))$ が真となります．他方，$\exists x \in (Q(x))$ が真ならばある $a \in X$ に対して $Q(a)$ が真となります．このとき $P(a) \vee Q(a)$ が真となりますから，$\exists x \in X\,(P(x) \vee Q(x))$ が真となります．

以上で証明が済みましたが，(1.46) の両辺の否定が同値であることを示すという方法もあります．すなわち

$$\begin{aligned}
\neg\,(\exists x \in X\,(P(x) \vee Q(x))) &\equiv \forall x \in X\,(\neg\,(P(x)) \wedge \neg\,(Q(x))) \\
&\overset{(*)}{\equiv} (\forall x \in X\,(\neg\,(P(x)))) \wedge (\forall x \in X\,(\neg\,(Q(x)))) \\
&\equiv \neg\,(\neg\,(\forall x \in X\,(\neg\,(P(x)))) \wedge (\forall x \in X\,(\neg\,(Q(x))))) \\
&\equiv \neg\,(\exists x \in X\,(P(x)) \vee \exists x \in X\,(Q(x)))
\end{aligned}$$

から (1.46) が従います．ここで (*) において (1.44) を用いました．

演習 1.14. 同値式

$$\exists x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv (\forall x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X\,(Q(x)))$$

が成立することを示しましょう．

次に (1.45) と関係するトートロジー

$$\exists x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in X\,(P(x))) \wedge (\exists x \in X\,(Q(x))) \tag{1.47}$$

を紹介します．左辺が真ならば，ある $a \in X$ に対して $P(a) \wedge Q(a)$ が成立します．従って $P(a)$ と $Q(a)$ が真です．従って $\exists x \in X(P(x))$ と $\exists x \in X(Q(x))$ が真ですから

$$(\exists x \in X(P(x))) \wedge (\exists x \in X(Q(x)))$$

が真であることが分かります．

演習 1.15. (1.47) の対偶が真であることを (1.45) を用いて示しましょう．

演習 1.16.

$$\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X\,(Q(x))))$$

がトートロジーであることを示しましょう．

演習 1.17.

$$\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X\,(Q(x))))$$

がトートロジーであることを示しましょう．

1.6.2　補足–命題関数（多変数）

集合 X, Y があるとします．その直積集合 $X \times Y$ 上の命題関数 $P(x,y)$ を考えます．このとき

$$\forall y \in Y\,(P(x,y))\,, \quad \exists y \in Y\,(P(x,y))$$

は X 上の命題関数となります．他方

$$\forall x \in X\,(P(x,y))\,, \quad \exists x \in X\,(P(x,y))$$

は Y 上の命題関数となります．

実例を考えます．$X = Y = \{1,2,3,4,5\}$ として、$X \times Y$ 上の命題関数

$$P(x,y) := (2x + y < 8) \tag{1.48}$$

を考えます．このとき $2x+y$ の値に関する右の表から

$y\backslash x$	1	2	3	4	5
1	**3**	**5**	**7**	9	11
2	**4**	**6**	8	10	12
3	**5**	**7**	9	11	13
4	**6**	8	10	12	14
5	**7**	9	11	13	15

$$\forall y \in Y\,(P(x,y)) \equiv (x = 1)$$

$$\exists y \in Y\,(P(x,y)) \equiv (x = 1,2,3)$$

であることが分かります．

別の実例を考えます．

$$X = Y = \mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R};\ x > 0\}$$

として，$X \times Y$ 上の命題関数

$$P(x,y) := \left(y > x^2\right)$$

を考えます．すると

$$\forall y \in Y\,(P(x,y)) \equiv F, \quad \exists y \in Y\,(P(x,y)) \equiv T$$

となります．さらに残っている変数 $x \in X$ について考えると

$$\forall x \in X\,(\forall y \in Y\,(P(x,y))) \equiv F, \qquad \exists x \in X\,(\forall y \in Y\,(P(x,y))) \equiv F$$
$$\forall x \in X\,(\exists y \in Y\,(P(x,y))) \equiv T, \qquad \exists x \in X\,(\exists y \in Y\,(P(x,y))) \equiv T$$

となります．他方，$x \in X$ から考えると

$$\forall x \in X\,(P(x,y)) \equiv F, \quad \exists x \in X\,(P(x,y)) \equiv T$$

となります．さらに残っている変数 $y \in Y$ について考えると

$$\forall y \in Y\,(\forall x \in X\,(P(x,y))) \equiv F, \qquad \exists y \in Y\,(\forall x \in X\,(P(x,y))) \equiv F$$
$$\forall y \in Y\,(\exists x \in X\,(P(x,y))) \equiv T, \qquad \exists y \in Y\,(\exists x \in X\,(P(x,y))) \equiv T$$

となります．

このように 2 変数の命題関数に限定作用素を施して 8 種類の命題を構成できますが，紛れない限り括弧を二重にするのはやめて，例えば

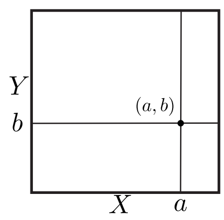
$$\exists x \in X\,(\forall y \in Y\,(P(x,y))) \quad \text{は} \quad \exists x \in X \forall y \in Y\,(P(x,y))$$

と略記することにします．これらの 8 種類の命題の間で成立することを説明します．

$$\forall (x,y) \in X \times Y\,(P(x,y)) \equiv \forall x \in X \forall y \in Y\,(P(x,y)) \equiv \forall y \in Y \forall x \in X\,(P(x,y)) \tag{1.49}$$

$$\exists (x,y) \in X \times Y\,(P(x,y)) \equiv \exists x \in X \exists y \in Y\,(P(x,y)) \equiv \exists y \in Y \exists x \in X\,(P(x,y)) \tag{1.50}$$

ですが，(1.49), (1.50) ともに図式的に $X \times Y$ を用いて示すことができます．



一般に 1 変数の命題関数 $R(y)$ に対して

$$\forall y \in Y\,(R(y)) \Rightarrow \exists y \in Y\,(R(y))$$

はトートロジーです．従って，任意の $x \in X$ に対して

$$\forall y \in Y\,(P(x,y)) \Rightarrow \exists y \in Y\,(P(x,y))$$

が成立します．よって

$$\forall x \in X \forall y \in Y\,(P(x,y)) \Rightarrow \forall x \in X \exists y \in Y\,(P(x,y)) \tag{1.51}$$

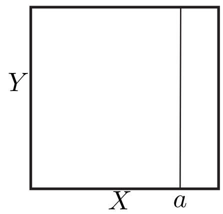
$$\exists x \in X \forall y \in Y\,(P(x,y)) \Rightarrow \exists x \in X \exists y \in Y\,(P(x,y)) \tag{1.52}$$

がトートロジーであることが分かります．次に

$$\exists x \in X \forall y \in Y\,(P(x,y)) \Rightarrow \forall y \in Y \exists x \in X\,(P(x,y)) \tag{1.53}$$

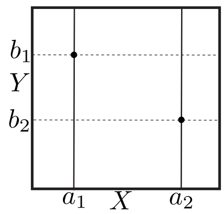
がトートロジーであることを説明します．左辺が成立するならば，ある $a \in X$ に対して

$$\forall y \in Y\,(P(a,y))$$



が成立します．従って任意の $b \in Y$ に対して

$$P(a,b) \quad \text{従って} \quad \exists x \in X\,(P(x,b))$$



が成立します．さらにこれは

$$\forall y \in Y \exists x \in X\,(P(x,y))$$

が成立することを意味します．右上図が左辺，右下図が右辺が成立することを表しています．すなわち右上図の場合は

$$\{(x,y) \in X \times Y;\ x = a\}$$

が $P(x,y)$ の真理集合に含まれているという意味です．また右辺が成立する場合は任意の $b \in Y$ に対して

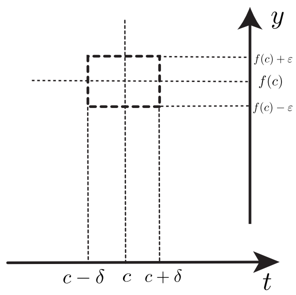
$$\{(x,y) \in X \times Y;\ y = b\}$$

に真理集合の点が少なくとも 1 点含まれていることを意味します．

最後に 2 変数の命題関数 $P(x,y)$ に $x \in X$, $Y \in Y$ に関する限定作用素を施して得られる命題，例えば $\forall x \in X \exists y \in Y\,(P(x,y))$ の否定について考えます．

$$\begin{aligned} \neg\,(\forall x \in X \exists y \in Y\,(P(x,y))) &\equiv \exists x \in X \neg\,(\exists y \in Y\,(P(x,y))) \\ &\equiv \exists x \in X \forall y \in Y \neg P(x,y) \end{aligned}$$

であることが分かります．



具体的な例を考えます．開区間 (a,b) 上の関数

$$f\colon\ (a,b) \to \mathbf{R}$$

が与えられているとします．このとき $c \in (a,b)$ で f が連続である必要十分条件は

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall t \in (a,b)\,(t \in (c-\delta, c+\delta) \Rightarrow f(c)-\varepsilon < f(t) < f(c)+\varepsilon)$$

と定義されます．これを否定すると

$$\exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 \exists t \in (a,b)\ \ (c-\delta < t < c+\delta\ \wedge\ (f(t) \leq f(c)-\varepsilon\ \vee\ f(t) \geq f(c)+\varepsilon))$$

となります．

演習 1.18. $X = Y = \{1,2,3,4,5\}$ とします．以下の命題の真偽値を求めましょう．
(1) $\forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)$ ***(2)*** $\forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)$
(3) $\exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)$ ***(4)*** $\exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)$

演習 1.19. 演習 *1.18* の各命題の否定を求めましょう．