1 (1) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

である。このとき

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix} \in L_2$$

となる。お互いに垂直な $\vec{a}$, $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化して

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|}(\vec{b}-\vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

は $L_2$ の正規直交基底となる。

(2) $\vec{c}$ の $L_2$ への直交射影 $\vec{w_0}$ は

$$\begin{aligned}
\vec{w_0} &= (\vec{p}, \vec{c})\cdot\vec{p} + (\vec{q}, \vec{c})\cdot\vec{q} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \\
&\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{4}{42}\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}7+8\\-7-2\\7-10\end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}15\\-9\\-3\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。$\vec{c}-\vec{w_0}$ は $L_2$ に垂直で

$$\vec{c} - \vec{w_0} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

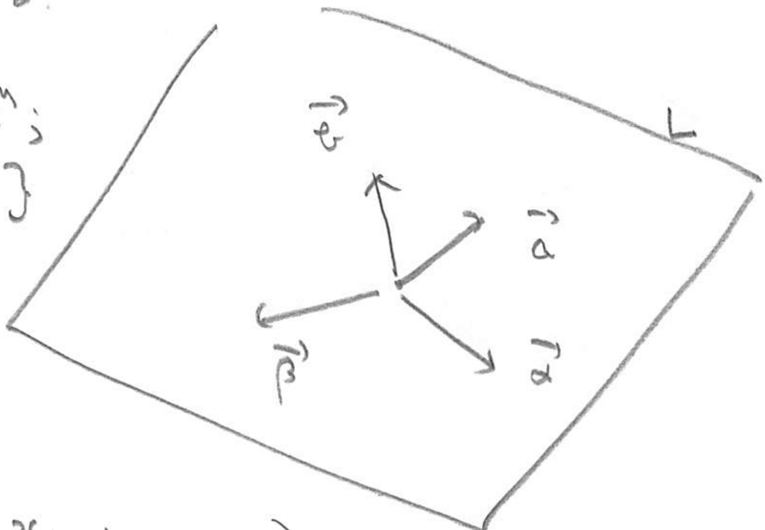
を正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

が求めるものとなる。

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ とする.

$L := L(\vec{a}, \vec{b}) = \{ x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbb{R}^n ;\ x, y \in \mathbb{R} \}$




$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in L$

$$\vec{\alpha} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b}$$

$$\vec{\beta} = x_2 \vec{a} + y_2 \vec{b}$$

とするとき $\vec{\alpha} \nparallel \vec{b} \left( \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$ を仮定する.

(#) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$

と表現できることに注意する.

$\forall \vec{v} \in L$ は $\vec{v} = \xi \vec{\alpha} + \eta \vec{\beta}$ と書ける. (一意的に).

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと $\vec{v} = (\vec{\alpha}\,\vec{\beta}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$= \xi \vec{\alpha} + \eta \vec{\beta}$

一意性は.

$$\vec{v} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

から

$$(\xi_1 - \xi_2)\vec{\alpha} + (\eta_1 - \eta_2)\vec{\beta} = \vec{0}$$

から $\xi_1 = \xi_2$, $\eta_1 = \eta_2$ と書ける

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} L$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x\vec{a} + y\vec{b} \qquad \xi\vec{a} + \eta\vec{b}$$

$$\uparrow \cong$$

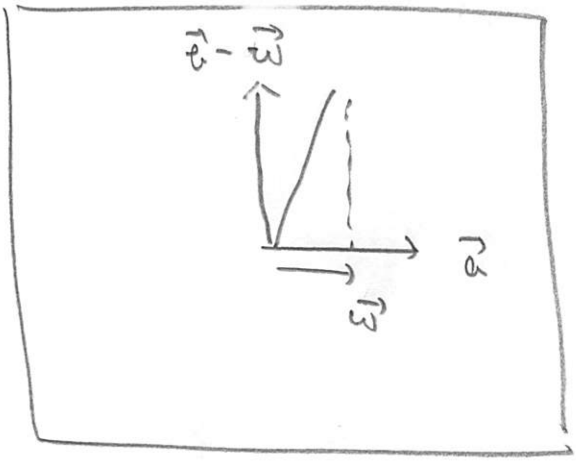
$$\mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \longleftarrow\!\shortmid \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

---

<u>問題</u>I (05/29) の状況で




$$\vec{w} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|}(\vec{b}-\vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = \frac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|}\left(-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= -\frac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|}\cdot\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} + \frac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|}\vec{b}$$

から

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{a}\|} & -\frac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|}\cdot\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \\ 0 & \frac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|} \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{42}}\cdot\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}} \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{42}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{p} + \frac{4}{\sqrt{42}}\vec{q}$$

$$= (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{42}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$$

---

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ を解く

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から $$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

従って $$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ が成り立つ.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^2$ とする。このとき

［**定理**
$\exists \vec{v} \in \mathbb{K}^3 \left( (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{v} = \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0} \right)$ ］

が成立する。

**証明** (i) $|\vec{a}\ \vec{b}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ のとき $\exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$$x_0 \vec{a} + y_0 \vec{b} = \vec{0}.$$

なので

$$\vec{0} = x_0\vec{a} + y_0\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

において $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

(ii) $|\vec{a}\ \vec{b}| \neq \vec{0}$ のとき。$v_3 = -1$ として

$$(\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{c}$$

を考えると $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})^{-1}\vec{c}$ が解となる。このとき

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0},\quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

証明了.

---

**応用①** $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$L = L(\vec{a}, \vec{b}) = \{ x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbb{K}^n ;\ x, y \in \mathbb{K} \}$$

と定義する（$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ は仮定しなくてよい）。このとき

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in L \Longrightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ は線形独立
でない i.e. $\exists \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$$c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} + c_3\vec{\gamma} = \vec{0}$$

実際、

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

となるが $\exists \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

このとき

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$n=3$のとき、

これから $F: \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ は全射でないことが

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x\vec{a} + y\vec{b}$

分かる。実際、Fが全射ならば

$$\mathrm{Im}(F) \ni \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

となる。

応用②　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^2$

$$G: \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

は単射でない。実際 $\exists \vec{v}_0 (\neq \vec{0}) \in \mathbb{K}^3$ が

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{v}_0 = \vec{0}$$

を満たす。$\vec{0} = G(\vec{0}) = G(\vec{v}_0)$ だが $\vec{0} \neq \vec{v}_0$ となる。

(7)

(i) Fが単射である条件は、Gが全射である条件は？

(ii) 定理を掃き出し法を使って示す。