$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1)$

$\underline{\lambda=5 \text{のとき}}$ $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff 2x-y=0$

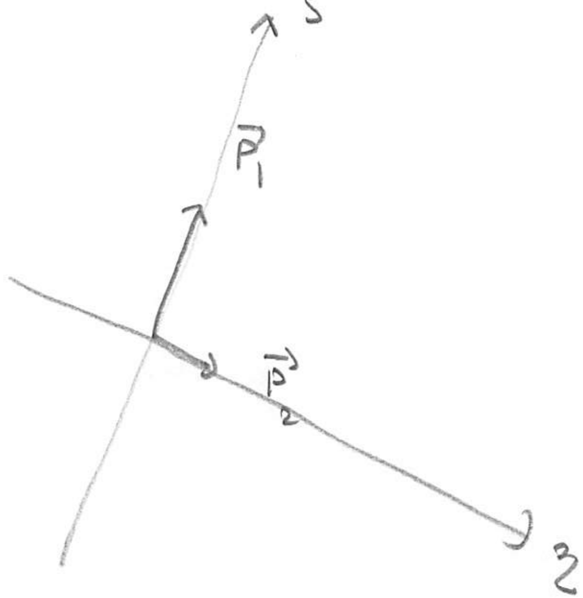
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(x \neq 0)$ が固有ベクトル

$\underline{\lambda=-1 \text{のとき}}$ $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x+y=0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(x \neq 0)$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ として

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$

$= P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

を用いることにする。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

を考える

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

とすると

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} P^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$$

示せるか？

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\xi(t) \\ -\eta(t) \end{pmatrix}$$

から

$$\xi(t) = \xi(0)\,e^{5t}$$

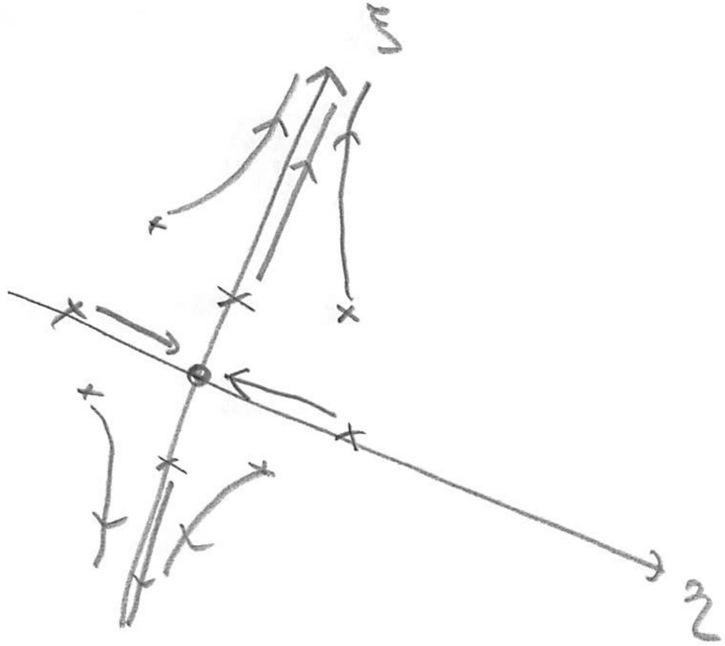
$$\eta(t) = \eta(0)\,e^{-t}$$

から

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\exp tA = P\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}P^{-1}}$$

については補足ビデオを作る予定



に注意しよう。

L04 演習問題 I, II がある

注) $A \in M_2(\mathbb{R})$ の固有値 α, β が実でない場合も重要である。(恐らく後期の講義で解説する)