2020 年 7 月 3 日確認問題 2020L05check

I $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbf{R}^n$, $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ とします．このとき $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$ {}^t\!AA\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{v} = \vec{0} $$

であることを示しましょう．

解答

($\Leftarrow$) $A\vec{v} = \vec{0}$ とします．この両辺に ${}^t\!A$ を掛けると

$$ {}^t\!AA\vec{v} = {}^t\!A\vec{0} = \vec{0} $$

が分かります．

($\Rightarrow$) ${}^t\!AA\vec{v} = \vec{0}$ とします．このとき

$$ ||A\vec{v}||^2 = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ({}^t\!AA\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0 $$

から $A\vec{v} = \vec{0}$ が従います．

II A が $m \times n$ 行列とします．$B = {}^t\!AA$ が対称行列であることを示しましょう．

解答

$$ {}^t\!B = {}^t({}^t\!AA) = {}^t\!A^t\left({}^t\!A\right) = {}^t\!AA = B $$

III 演習 5.3 (教科書 134 ページ) $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{x} \neq \vec{0}$ を満たすとします．このとき $\vec{x}$ が線型独立であることを示しましょう．

解答 $c\vec{x} = \vec{0}$ とします．

$$ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0} $$

が成立しますから，ある j に対して $\vec{x}$ の第 j 成分が $x_j \neq 0$ を満たします．ここで

$$ c\vec{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_j \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix} = \vec{0} $$

の第 j 成分が $cx_j = 0$ を満たしますから，$c = 0$ が従います.

IV 演習 5.4（教科書 136 ページ） $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ とします．$P \in M_n(\mathbf{R})$ が正則であるとき

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \text{が線型独立} \Rightarrow P\vec{x}_1, \cdots, P\vec{x}_k \text{が線型独立}$$

を示しましょう.

解答

$$c_1 P\vec{x}_1 + \cdots + c_k P\vec{x}_k = \vec{0}$$

とします.

$$P(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k) = c_1 P\vec{x}_1 + \cdots + c_k P\vec{x}_k$$

から

$$P(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k) = \vec{0}$$

が成立することが分かります．この両辺に P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}P(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k) = I_n(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k) = c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k$$

から

$$c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k = \vec{0}$$

が従います．$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k$ が線型独立であることから $c_1 = \cdots = c_k = 0$ であることが分かります．以上で $P\vec{x}_1, \cdots, P\vec{x}_k$ が線型独立であることが示されました.

V 演習 5.5（教科書 136 ページ） $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が線型独立であるとします．また $Q \in M_k(\mathbf{R})$ が正則であるとします．このとき

$$(\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_k)Q = (\vec{y}_1 \ \cdots \ \vec{y}_k)$$

とすると $\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_k \in \mathbf{R}^n$ が線型独立であることを示しましょう.

解答 $\vec{c} \in \mathbf{R}^k$ に対して

$$(\vec{y}_1 \ \cdots \ \vec{y}_k)\vec{c} = (\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_k)Q\vec{c}$$

となりますから，$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k$ が線型独立であることから $Q\vec{c} = \vec{0}$ が従います．このとき Q が正則ですから $\vec{c} = \vec{0}$ となります.

VI 演習 5.6（教科書 136 ページ）

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$$

が線型独立であるとします．このとき

$$\vec{x}_1, \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$$

が線型独立であることを示しましょう.

解答（その１）k に関する帰納法で証明します．$k=1$ の場合は自明です．次に $(k-1)$ の場合，すなわち

$$\begin{aligned}&\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_{k-1} \text{ が線型独立である}\\ \Rightarrow&\vec{x}_1,\vec{x}_1+\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_{k-1} \text{ が線型独立である}\end{aligned}$$

が成立することを仮定します．このとき

$$\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_{k-1},\vec{x}_k \text{ が線型独立である} \tag{1}$$

であると仮定します．このとき

$$c_1\vec{x}_1+c_2(\vec{x}_1+\vec{x}_2)+\cdots+c_k(\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_k)=\vec{0} \tag{2}$$

とします．この (2) の左辺を整理すると

$$(c_1+\cdots+c_k)\vec{x}_1+(c_2+\cdots+c_k)\vec{x}_2+\cdots+(c_{k-1}+c_k)\vec{x}_{k-1}+c_k\vec{x}_k=\vec{0}$$

が従います．(1) から

$$c_1+c_2+\cdots+c_k=c_2+\cdots+c_k=\cdots=c_{k-1}+c_k=c_k=0$$

が分かります．特に $c_k=0$ が成立することを用いると (2) から

$$c_1\vec{x}_1+c_2(\vec{x}_1+\vec{x}_2)+\cdots+c_{k-1}(\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_{k-1})=\vec{0} \tag{3}$$

が従います．(1) から

$$\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_{k-1} \text{ が線型独立である}$$

ことが成立しますから，帰納法の仮定すなわち $(k-1)$ の場合が成立することを仮定していますから

$$\vec{x}_1,\vec{x}_1+\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_{k-1} \text{ が線型独立である}$$

が従います．このことから (3) から

$$c_1=c_2=\cdots=c_{k-1}=0$$

が導けます．以上で

$$\begin{aligned}&c_1\vec{x}_1+c_2(\vec{x}_1+\vec{x}_2)+\cdots+c_k(\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_k)=\vec{0}\\ \Rightarrow&c_1=\cdots=c_{k-1}=c_k=0\end{aligned}$$

すなわち

$$\vec{x}_1,\vec{x}_1+\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_{k-1},\vec{x}_k \text{ が線型独立である}$$

ことが証明できました．

（その２）

$$\vec{y}_1=\vec{x}_1,\ \vec{y}_2=\vec{x}_1+\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_k=\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_k$$

と定めます．すると

$$(\vec{y}_1\ \cdots\ \vec{y}_k)=(\vec{x}_1\ \cdots\ \vec{x}_k)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&&1\end{pmatrix}$$

が成立します．この右辺に現れる k 次正方行列（上三角行列）

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

は

$$|Q| = 1$$

を満たしますから正則です．従って演習 5.5 から $\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_k$ が線型独立であることが従います.

VII 演習 5.7（教科書 136 ページ） $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$ であるための a, b, c に関する条件を求めましょう.

解答

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ -1 & 3 & 1 & b \\ 2 & -4 & 0 & c \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 3 & 3 & a+b \\ 0 & -4 & -4 & -2a+c \end{array}\right)$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ 0 & -4 & -4 & -2a+c \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b+c \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) \quad & 2r+=1r,\ 3r+=1r\times(-2) \\ (ii) \quad & 2r\times=\frac{1}{3} \\ (iii) \quad & 3r+=2r\times 4 \end{aligned}$$

を施します．これから

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & a \\ & & y & + & z & = & \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & -\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b+c \end{array} \right.$$

であることが分かります．この条件を満たす $x, y, z \in \mathbf{R}$ が存在することが

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$$

ですので，求める条件が

$$-\frac{2}{3}a + \frac{4}{3}b + c = 0 \quad \text{すなわち} \quad -2a + 4b + 3c = 0$$

であることが分かります.

VIII 演習 5.8（教科書 137 ページ） $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ に対して $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ となる条件を行列によって $B\vec{v} = \vec{0}$ と表しましょう．

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & 4 & 3 & y \\ 3 & 1 & 2 & z \\ 1 & 3 & 2 & w \end{pmatrix} \xrightarrow[(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & -2x+y \\ 0 & -2 & -1 & -3x+z \\ 0 & 2 & 1 & -x+w \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(ii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & -5x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y+w \end{pmatrix} \xrightarrow[(iii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 0 & -5x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y+w \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(iv)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2x-\frac{1}{2}y \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 0 & -5x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y+w \end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times(-3),\ 4r+=1r\times(-1) \\ (ii) &\quad 3r+=2r,\ 4r+=2r\times(-1) \\ (iii) &\quad 2r\times=\frac{1}{2} \\ (iv) &\quad 1r+=2r\times(-1) \end{aligned}$$

を施します．$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ と列ベクトル表示をすると $\vec{v} = {}^t(x\ y\ z\ w)$ に対して

$$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} c_1 & & & + & \frac{1}{2}c_3 & = & 2x-\frac{1}{2}y \\ & & c_2 & + & \frac{1}{2}c_3 & = & -x+\frac{1}{2}y \\ 0c_1 & + & 0c_2 & + & 0c_3 & = & -5x+y+z \\ 0c_1 & + & 0c_2 & + & 0c_3 & = & x-y+w \end{array} \right.$$

が成立します．もし

$$-5x+y+z \neq 0 \quad \text{または} x-y+w \neq 0$$

ならば右側の条件が成立しませんから $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ ならば

$$-5x+y+z = 0 \quad \text{かつ} x-y+w = 0 \tag{1}$$

が必要であることが分かります．逆に (1) が成立するならば

$$c_1 = 2x - \frac{1}{2}y,\ c_2 = -x + \frac{1}{2}y,\ c_3 = 0$$

が

$$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 \in \mathrm{Im}(A)$$

を満たします．従って (1) が $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ の必要十分条件で

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

と表されます．

IX

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

とします．さらに

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

とします．

(1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立で

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in L = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

であることを示しましょう．

(2) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ が線型独立で，$L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ の基底となることを示しましょう．

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が L で定める座標と $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ が L で定める座標を相互に表しましょう．

解答　(1)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \mid \vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{(i)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(ii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(iii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(iv)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と行基本変形をすると

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$$

であることが分かりますから $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は線型独立であることが分かります．また

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} - \vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\ y = 1,\ z = 0$$

から

$$\vec{\alpha} = \vec{a} + \vec{b}$$

が分かります．同様に

$$\vec{\beta} = -\vec{a} + \vec{c}, \quad \vec{\gamma} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$$

も分かります．

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(a)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(b)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(c)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(d)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

から $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ は正則で $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ であることが分かります．他方

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P \tag{\#}$$

が成立しますから

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

とすると

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が従います．このとき $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は線型独立ですから

$$P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となります．さらに P が正則ですから

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

であることが分かります．以上で $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ が線型独立であることが示されました．

(3)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすると (#) から

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

となりますが、$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が線型独立ですから

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$$

さらに

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

が分かります.

X 演習 3.2（教科書 65 ページ） 次の行列を行基本変形を用いて狭義の階段行列にしましょう.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}4 & 7 & -14 & 10\\ 2 & 3 & -4 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 6\end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix} \underset{(i)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & -10\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -3 & 6 & -8\end{pmatrix} \underset{(ii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -4 & 3 & -10\\ 0 & -3 & 6 & -8\end{pmatrix}$$

$$\underset{(iii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & -7 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 15 & -2\\ 0 & 0 & 15 & -2\end{pmatrix} \underset{(iv)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & -7 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{15}\\ 0 & 0 & 15 & -2\end{pmatrix} \underset{(v)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{14}{15}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{15}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned}
(i) &\quad 2r+=1r\times(-3),\ 3r+=1r\times(-3)\\
(ii) &\quad 2r\leftrightarrow 3r\\
(iii) &\quad 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times 4,\ 4r+=2r\times 3\\
(iv) &\quad 3r\times=\frac{1}{15}\\
(v) &\quad 1r+=3r\times 7,\ 2r+=3r\times(-3),\ 4r+=3r\times(-15)
\end{aligned}$$

を施します.

(2)

$$\begin{pmatrix}4 & 7 & -14 & 10\\ 2 & 3 & -4 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 6\end{pmatrix} \underset{(i)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\ 2 & 3 & -4 & -4\\ 4 & 7 & -14 & 10\end{pmatrix} \underset{(ii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & -6 & -16\\ 0 & 3 & -18 & -14\end{pmatrix}$$
$$\underset{(iii)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 22\\ 0 & 1 & -6 & -16\\ 0 & 0 & 0 & 34\end{pmatrix} \underset{(iv)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 22\\ 0 & 1 & -6 & -16\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{(v)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 0\\ 0 & 1 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned}
(i) &\quad 1r \leftrightarrow 3r\\
(ii) &\quad 2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times (-3)\\
(iii) &\quad 1r+ = 2r \times (-1),\ 3r+ = 2r \times (-4)\\
(iv) &\quad 3r \times \frac{1}{34}\\
(v) &\quad 1r+ = 3r \times (-22),\ 2r+ = 3r \times 16
\end{aligned}$$

を施します.

XI 演習 3.3（教科書 66 ページ）(3.4) 式，すなわち

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 3 & 5 & 5 & 7 & 0\end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

の行基本変形をしてみましょう.

解答

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 3 & 5 & 5 & 7 & 0\end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0\\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0\end{array}\right) \underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0\end{array}\right)$$
$$\underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0\end{array}\right) \underset{(iv)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \underset{(v)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned}
(i) &\quad 2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times (-3)\\
(ii) &\quad 2r\times = (-1)\\
(iii) &\quad 1r+ = 2r \times (-2),\ 3r+ = 2r\\
(iv) &\quad 3r\times = \left(-\frac{1}{2}\right)\\
(v) &\quad 1r+ = 3r,\ 2r+ = 3r \times (-2)
\end{aligned}$$

を施します.

XII 演習 3.4（教科書 67 ページ）(3.6) 式すなわち

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

の行基本変形をしましょう．また (3.7) 式において $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が平行でないことを示しましょう．

解答

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(ii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(iii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(iv)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 1r \leftrightarrow 3r \\ (ii) &\quad 3r+ = 1r \times (-3),\ 4r+ = 1r \times (-4) \\ (iii) &\quad 2r\times = \frac{1}{2} \\ (iv) &\quad 1r+ = 2r \times (-1),\ 3r+ = 2r,\ 4r+ = 2r \times (-1) \end{aligned}$$

を施します．次に

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

とします．この左辺は $\begin{pmatrix} * \\ * \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ となりますから，$c_1 = c_2 = 0$ が従います．よって

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であることが示されました．

XIII 演習 3.5（教科書 67 ページ）以下の行列 A に対して斉次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を解きましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 4 & -12 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&1&1&3\\3&3&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[(i)]{}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-3&1&1\\0&-3&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(ii)]{}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&-3&1&1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(iii)]{}\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned}(i)&\quad 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times(-3)\\(ii)&\quad 2r\times=\left(-\frac{1}{3}\right)\\(iii)&\quad 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times 3\end{aligned}$$

を施します．これから

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1 \qquad\quad + \frac{2}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 = 0\\ \qquad x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0\end{cases}$$

であることが分かります．$x_3=\alpha,\ x_4=\beta$ とおくと解は

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\alpha-\frac{5}{3}\beta\\\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\\frac{1}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$$

と表せます．

(2)

$$\begin{pmatrix}1&-3&0&2\\2&-6&2&2\\4&-12&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[(i)]{}\begin{pmatrix}1&-3&0&2\\0&0&2&-2\\0&0&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[(ii)]{}\begin{pmatrix}1&-3&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&3&-3\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(iv)]{}\begin{pmatrix}1&-3&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned}(i)&\quad 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times(-4)\\(ii)&\quad 2r\times=\frac{1}{2}\\(iii)&\quad 3r+=2r\times(-3)\end{aligned}$$

を施します．これから

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1 - 3x_2 \qquad + 2x_4 = 0\\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = 0\end{cases}$$

であることが分かります．$x_2=\alpha,\ x_4=\beta$ とおくと解は

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\alpha-2\beta\\\alpha\\\beta\\\beta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

と表せます.

XIV 演習 3.12（教科書 79 ページ） exo:30012 次の行列の逆行列が存在すれば求めましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{(iv)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{(v)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)
$$

と行基本変形

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad 2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times (-3),\ 4r+ = 1r \times (-1) \\
(ii) &\quad 1r+ = 2r \times (-1),\ 4r+ = 2r \times (-1) \\
(iii) &\quad 3r \leftrightarrow 4r \\
(iv) &\quad 1r+ = 3r \times (-2),\ 4r+ = 3r \times 3 \\
(v) &\quad 2r+ = 4r,\ 3r+ = 2r \times (-1)
\end{aligned}
$$

を施します．この結果から A は正則で

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}
$$

であることが分かります.

(2)

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$
$$
\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)
$$
$$
\underset{(iv)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(iv)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

と行基本変形

$$
\begin{array}{rl}
(i) & 1r \leftrightarrow 3r \\
(ii) & 1r\times = (-1) \\
(iii) & 2r+ = 1r \times (-2),\ 3r+ = 1r \times (-2) \\
(iv) & 2r\times = \dfrac{1}{5},\ 3r\times = \dfrac{1}{2} \\
(v) & 1r+ = 2r,\ 1r+ = 3r \times (-1)
\end{array}
$$

を施します．この結果から A は正則で

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

であることが分かります．

XV 演習 3.13（教科書 80 ページ） $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z},\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ が関係式

$$
\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} &= \vec{a} \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} &= \vec{b} \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} &= \vec{c} \end{cases}
$$

満たしているとします．このとき $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ で表しましょう．これはある行列の逆行列を計算して表しましょう．

解答 与えられた $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z},\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ に関する関係式を

$$
(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right) \tag{1}
$$

と表現します．ここで

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

の逆行列を求めます.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(i)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[(ii)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(iii)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[(iv)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[(v)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[(vi)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{array}{rl} (i) & 2r+=1r,\ 3r+=1r\times(-2) \\ (ii) & 3r+=2r\times 2 \\ (iii) & 2r\leftrightarrow 3r \\ (iv) & 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times(-3) \\ (v) & 3r\times\dfrac{1}{10} \\ (vi) & 1r+=3r\times(-9),\ 3r+=2r\times 3 \end{array}$$

を施します．この計算から

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

が分かります．A^{-1} を (1) の右側から掛けると

$$\begin{aligned} (\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}) &= \left(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{10}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}+\frac{1}{10}\vec{c}\quad \frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\quad \frac{7}{10}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}-\frac{3}{10}\vec{c}\right) \end{aligned}$$

であることが導けます.

参考 Maxima による検算

```
(%i1) A: matrix([1,2,3],[-1,1,-2],[2,-1,1]);
                                [  1    2    3  ]
                                [               ]
(%o1)                           [ - 1   1   - 2 ]
                                [               ]
                                [  2   - 1   1  ]
(%i2) invert(A);
                                [ 1    1    7   ]
                                [ --   -    --  ]
                                [ 10   2    10  ]
                                [               ]
                                [ 3    1    1   ]
(%o2)                           [ --   -    --  ]
                                [ 10   2    10  ]
                                [               ]
                                [ 1     1    3  ]
                                [ --  - -  - -- ]
                                [ 10    2    10 ]
```