L07 07/17 石側記

I $\vec{w} \in V^{\perp} \iff \forall \vec{v} \in V \quad (\vec{v}, \vec{w}) = 0$

なので $\vec{a}_j \in V$ から $\boxed{(\vec{a}_j, \vec{w}) = 0 \quad (j = 1, \cdots, l) \quad (\#)}$

となる。逆に (#) が成立すると

$\forall \vec{v} \in V$ は $\vec{v} = \sum_{j=1}^{l} c_j \vec{a}_j$ と書けるので

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{j=1}^{l} c_j (\vec{a}_j, \vec{w}) = \sum_{j=1}^{l} c_j \cdot 0 = 0$$

が従う。

II $\vec{v} \in V$ とする。このとき $\forall \vec{w} \in V^{\perp}$ に対して

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

となる。従って $\vec{v} \in (V^{\perp})^{\perp}$ が従う。よって

$$V \subset (V^{\perp})^{\perp}$$

補足 $\dim V = l$ とすると V の基底 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_l$ に対して

$$\vec{w} \in V^{\perp} \iff \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_l \end{pmatrix} \vec{w} = \vec{0}$$

が分かる。$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_l \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \mathrm{rank}(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_l) = l$ から

L07ビデオ

$$\dim V^{\perp} = \dim \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_l \end{pmatrix} = n - l$$

これを用いると

$$\dim (V^{\perp})^{\perp} = n - (n - l) = l$$

$$V \subset (V^{\perp})^{\perp}$$

の両辺の次元が l となるので

$$V = (V^{\perp})^{\perp}$$

III
$$A(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{p}\ \vec{q}) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

から

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p} + \vec{q}, \quad A\vec{q} = \alpha\vec{q}$$

が分かる. よって

$$A(\vec{q}\ \vec{p}) = (\alpha\vec{q}\quad \alpha\vec{p} + \vec{q})$$

$$= (\vec{q}\ \vec{p}) \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

($\vec{p} \nparallel \vec{q}$ から $(\vec{q}\ \vec{p})$ は正則で

$$(\vec{q}\ \vec{p})^{-1} A (\vec{q}\ \vec{p}) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$