2020 年 10 月 02 日確認問題解答

I

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

とに対して積 ab と ba を求めましょう.

解答

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

II $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して a^{-1} を求めましょう。

解答

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

III S_3 のすべての要素を互換の積で表しましょう。

解答

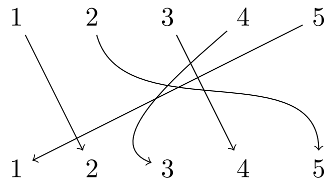
$$\begin{aligned}
&a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) = (2\ 3) \\
&a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = (1\ 2) \\
&a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad (1\ 3)a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = (1\ 2) \text{ から} \\
&\quad a = (1\ 3)(1\ 2) \\
&a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \quad (2\ 3)a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = (1\ 2) \text{ から} \\
&\quad a = (2\ 3)(1\ 2) \\
&a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (1\ 3)
\end{aligned}$$

V 次の置換の符号を求めましょう.
(1) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

解答 (1)

右図から反転数が 7 であることが分かるので,

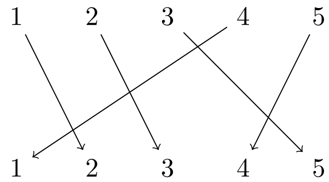
$$\varepsilon(a) = (-1)^7 = -1$$



(2)

右図から反転数が 4 であることが分かるので,

$$\varepsilon(a) = (-1)^4 = +1$$



VI 次の置換を互換の積で表しましょう.

(1) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$(1\ 5)a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(3\ 4)(1\ 5)a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2)$$

から

$$a = (1\ 5)(3\ 4)(1\ 2)$$

(2)

$$(4\ 5)a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 4)(4\ 5)a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 3)(1\ 4)(4\ 5)a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2)$$

から

$$a = (4\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$

VI $f \in S_n$ に対して

$$f^{\#} : \Omega_n \to \Omega_n \quad \{i, j\} \mapsto \{f(i), f(j)\}$$

が全単射であることを示しましょう。ただし次の定理を用いて、単射であることを示せば十分です。

定理 X を有限集合とします. このとき $f : X \to X$ に対して

$$f\text{は単射である} \Leftrightarrow f\text{は全射である}$$

解答 $f^{\#}$ が単射であることを示します．$\{i,j\},\{k,\ell\}\in\Omega_2$ に対して

$$\{i,j\}\neq\{k,\ell\}$$

が成立するとします．このとき

$$\{i,j\}\cap\{k,\ell\}=\emptyset \quad \mathrm{OR} \quad \#\left(\{i,j\}\cap\{k,\ell\}\right)=1$$

が成立します.

(a) $\underline{\{i,j\}\cap\{k,\ell\}=\emptyset \text{ の場合}}$$i,j,k,\ell$ は相異なることに注意します．f は単射ですから $f(i),f(j),f(k),f(\ell)$ は相異なります．従って

$$\{f(i),f(j)\}\cap\{f(k),f(\ell)\}=\emptyset$$

から $\{f(i),f(j)\}\neq\{f(k),f(\ell)\}$ が分かります.

(a) $\underline{\#\left(\{i,j\}\cap\{k,\ell\}\right)=1 \text{ の場合}}$

$$\{k,\ell\}=\{i,k\} \quad (i\neq k)$$

としても一般性は失われません．このとき $f(i),f(j),f(\ell)$ は相異なることに注意すると，$\{f(k),f(\ell)\}=\{f(i),f(k)\}$ において

$$\{f(i),f(j)\}\neq\{f(k),f(\ell)\}$$

であることが分かります.

以上で

$$f^{\#}(\{i,j\})\neq f^{\#}(\{k,\ell\})$$

が示されました.

VII 次の置換 a を循環置換の積で表して、さらに互換の積で表しましょう。

(1) $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&8&5&1&3&9&6&4&7\end{pmatrix}$ **(2)** $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&6&2&9&7&1&4&3&8\end{pmatrix}$

(1)

$$\begin{aligned}a&=(1\ 2\ 8\ 4)(3\ 5)(6\ 9\ 7)\\&=(1\ 4)(1\ 8)(1\ 2)(3\ 5)(6\ 7)(6\ 9)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}a&=(1\ 5\ 7\ 4\ 9\ 8\ 3\ 2\ 6)\\&=(1\ 6)(1\ 2)(1\ 3)(1\ 8)(1\ 9)(1\ 4)(1\ 7)(1\ 5)\end{aligned}$$