2020 年 10 月 02 日演習問題解答

I $m \times n$ 行列 A があるとします。P が m 次の正方行列、Q が n 次の正則行列であるとき

$$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim \mathrm{Im}(PA) \tag{7}$$

$$\dim \ker(A) = \dim \ker(AQ) \tag{8}$$

が成立することを示しましょう。

解答　(7) について

$\mathrm{Im}(A)$ の基底を $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ としましょう．このとき $\alpha_j = A\vec{x}_j$ を満たす $\vec{x}_j \in \mathbf{K}^n$ が存在しますから $P\vec{\alpha}_j = PA\vec{x}_j \in \mathrm{Im}(PA)$ となることが分かります．以下では

$$P\vec{\alpha}_1, \dots, P\vec{\alpha}_\ell \text{ は } \mathrm{Im}(PA) \text{ の基底となる}$$

ことを示します．$c_1P\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell P\vec{\alpha}_\ell = \vec{0}$ が成立すると

$$c_1P\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell P\vec{\alpha}_\ell = P\left(c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell\vec{\alpha}_\ell\right) = \vec{0}$$

から $c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell\vec{\alpha}_\ell = \vec{0}$ が導けますから $c_1 = \cdots = c_\ell = 0$ が従います．よって

$$P\vec{\alpha}_1, \dots, P\vec{\alpha}_\ell \text{ は線型独立である}$$

ことが分かりました．さらに任意の $\vec{v} \in \mathrm{Im}(PA)$ をとるとある $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して $\vec{v} = PA\vec{x}$ が成立します．このとき $A\vec{x} \in \mathrm{Im}(A)$ が成立しますから

$$A\vec{x} = c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell\vec{\alpha}_\ell$$

と表現されます．この両辺に P を掛けると

$$\vec{v} = PA\vec{x} = P\left(c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell\vec{\alpha}_\ell\right) = c_1P\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_\ell P\vec{\alpha}_\ell$$

と $\vec{v}$ が $P\vec{\alpha}_1, \dots, P\vec{\alpha}_\ell$ の線型和で表現できます．以上で

$$P\vec{\alpha}_1, \dots, P\vec{\alpha}_\ell \text{ は } \mathrm{Im}(PA) \text{ を生成する}$$

ことが分かりました．

(8) について　$\ker(A)$ の基底を $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ としましょう．このとき $AQ \cdot Q^{-1}\vec{\beta}_i = A\vec{\beta}_i = \vec{0}$ が成立しますから，$Q^{-1}\vec{\beta}_i \in \ker(AQ)$ となることが分かります．以下では

$$Q^{-1}\vec{\beta}_1, \dots, Q^{-1}\vec{\beta}_k \text{ は } \ker(AQ) \text{ の基底となる}$$

ことを示します．$c_1Q^{-1}\vec{\beta}_1 + \cdots + c_kQ^{-1}\vec{\beta}_k = \vec{0}$ が成立すると

$$c_1Q^{-1}\vec{\beta}_1 + \cdots + c_kQ^{-1}\vec{\beta}_k = Q^{-1}\left(c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_t\vec{\beta}_k\right) = \vec{0}$$

から $c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_t\vec{\beta}_k = \vec{0}$ が導けますから $c_1 = \cdots = c_k = 0$ が従います．よって

$$Q^{-1}\vec{\beta}_1, \dots, Q^{-1}\vec{\beta}_k \text{ は線型独立である}$$

ことが分かります．次に $\vec{w} \in \ker(AQ)$ を任意にとります．このとき $Q\vec{w} \in \ker(A)$ ですから

$$Q\vec{w} = c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_t\vec{\beta}_k$$

と表されます．この両辺に Q^{-1} を掛けると

$$\vec{w} = Q^{-1}(c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_t\vec{\beta}_k) = c_1Q^{-1}\vec{\beta}_1 + \cdots + c_tQ^{-1}\vec{\beta}_k$$

となりますから

$$Q^{-1}\vec{\beta}_1, \ldots, Q^{-1}\vec{\beta}_k \text{ は } \ker(AQ) \text{ を生成する}$$

ことが示されました．

II $V \subset \mathbf{R}^n$ は部分空間とします。

$$V^{\perp} = \{\vec{w} \in \mathbf{R}^n; (\vec{v}, \vec{w}) = 0 \ (\vec{v} \in V)\}$$

は $\mathbf{R}^n$ の部分空間です（V の直交補空間と呼びます）．
(1) V_1, V_2 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします。

$$V_1 \subset V_2$$

が成立するならば $V_1^{\perp} \supset V_2^{\perp}$ が成立することを示しましょう。
(2) V_1, V_2 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします。

$$(V_1 + V_2)^{\perp} \subset V_j^{\perp} \ (j = 1, 2)$$

を示しましょう。
(3) V_1, V_2 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします。

$$(V_1 + V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$$

であることを示しましょう。

解答 (1) $\vec{w} \in V_2^{\perp}$ とします．$\vec{v}_1 \in V_1$ であると $\vec{v}_1 \in V_2$ となりますから

$$(\vec{w}, \vec{v}_1) = 0$$

が従います．よって $\vec{w} \in V_1^{\perp}$ であることが分かります．
(2) $V_1, V_2 \subset V_1 + V_2$ が成立しますから (1) を用いると

$$(V_1 + V_2)^{\perp} \subset V_1^{\perp}, \ (V_1 + V_2)^{\perp} \subset V_2^{\perp}$$

が分かります．
(3) (2) から

$$(V_1 + V_2)^{\perp} \subset V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$$

が分かります．逆に $\vec{w} \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$ とします．$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ が $\vec{v}_1 \in V_1$, $\vec{v}_2 \in V_2$ に対して成立しているとすると $\vec{w} \in V_1^{\perp}$ かつ $\vec{w} \in V_2^{\perp}$ が成立しますから

$$(\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{v}_1) + (\vec{w}, \vec{v}_2) = 0$$

となります．これは $V_1^\perp \cap V_2^\perp \subset (V_1+V_2)^\perp$ を意味します．以上で $(V_1+V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$ を示しました.
注意 さらに (3) の両辺の直交補空間を考えると

$$(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$$

が導けます.

III A を $m \times n$ 行列として A が定める線型写像を

$$f_A:\ \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m \quad \vec{v} \mapsto A\vec{v}$$

と表します.
(1) V は $\mathbf{K}^n$ の部分空間とします。このとき

$$AV := f_A(V) = \{A\vec{v} \in \mathbf{K}^m ; \vec{v} \in V\}$$

が $\mathbf{K}^m$ の部分空間であることを示しましょう。
(2) W は $\mathbf{K}^m$ の部分空間とします。このとき

$$f_A^{-1}(W) = \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n ; A\vec{v} \in W\}$$

が $\mathbf{K}^n$ の部分空間であることを示しましょう。

解答 **(1)** $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in AV$ とします．このとき

$$A\vec{v}_1 = \vec{w}_1, \quad A\vec{v}_2 = \vec{w}_2$$

を満たす $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ が存在します．このとき

$$\lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 = \lambda_1 A\vec{v}_1 + \lambda_2 A\vec{v}_2 = A\left(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\right)$$

から $\lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 \in AV$ が分かります．よって AV は部分空間です.
(2) $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in f_A^{-1}(W)$ とします．このとき $A\vec{v}_1, A\vec{v}_2 \in W$ となります．W は部分空間ですから

$$A\left(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\right) = \lambda_1 A\vec{v}_1 + \lambda_2 A\vec{v}_2 \in W$$

から $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 \in f_A^{-1}(W)$ であることが分かります．これは $f_A^{-1}(W)$ が部分空間であることを意味します.