2020 年 10 月 09 日演習問題解答

V_1, V_2, V_3 は $\mathbf{R}^n$ の部分空間とします.

$$V_i \perp V_j \quad (i \neq j)$$

ならば

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

となることを示しましょう.

解答 $\vec{v}_j \in V_j \ (j = 1, 2, 3)$ が

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \tag{1}$$

を満たすとします. このとき

$$(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad (i \neq 0)$$

が成立します. (1) の両辺と $\vec{v}_3$ との内積をとると

$$(\vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_3, \vec{v}_1) + (\vec{v}_3, \vec{v}_2) + (\vec{v}_3, \vec{v}_3) = ||\vec{v}_3||^2 = 0$$

となりますから $\vec{v}_3 = \vec{0}$ が従います. (1) に $\vec{v}_3 = \vec{0}$ を代入すると

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0} \tag{2}$$

となりますが, この両辺と $\vec{v}_2$ との内積をとると

$$(\vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{v}_2, \vec{v}_1) + (\vec{v}_2, \vec{v}_2) = ||\vec{v}_2||^2 = 0$$

から $\vec{v}_2 = \vec{0}$ が従います。さらに (2) に $\vec{v}_2 = \vec{0}$ を代入すると $\vec{v}_1 = 0$ が成立します. 以上で

$$\left.\begin{array}{c} \vec{v}_j \in V_j \quad (j = 1, 2, 3) \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{0}$$

を示しましたから

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

が成立することを示しました.

II V_1, V_2, V_3 は $\mathbf{K}^n$ の部分空間とします.

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

ならば

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$$

となることを示しましょう.

解答 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in V_1$ を V_1 の基底，$\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_\ell \in V_2$ を V_2 の基底，$\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m \in V_3$ を V_3 の基底とします．任意の $\vec{v} \in V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ は

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_j \in V_j \ (j = 1, 2, 3)$$

と一意的に表現できます．さらに

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k \\ \vec{v}_2 &= d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell \\ \vec{v}_3 &= e_1\vec{c}_1 + \ldots + e_m\vec{c}_m \end{aligned}$$

と $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を基底で表します．すると

$$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k + d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell + e_1\vec{c}_1 + \ldots + e_m\vec{c}_m$$

となりますから，$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ が

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_\ell, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m$$

で生成されることが分かります．さらに

$$c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k + d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell + e_1\vec{c}_1 + \ldots + e_m\vec{c}_m = \vec{0}$$

とすると直和であることを用いて

$$c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_k\vec{a}_k = d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_\ell\vec{b}_\ell = e_1\vec{c}_1 + \ldots + e_m\vec{c}_m = \vec{0}$$

が従います．さらに $\{\vec{a}_s\}$ が V_1 の基底，$\{\vec{b}_t\}$ が V_2 の基底，$\{\vec{c}_u\}$ が V_3 の基底ですから

$$c_1 = \cdots = c_k = d_1 = \cdots = d_\ell = e_1 = \cdots = e_m = 0$$

であることが分かります．よって

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_\ell, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m$$

が線型独立であることが分かり，$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ の基底であることが証明されました．よって

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3) = k + \ell + m = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$$

が示されました．

III $A \in M_n(\mathbf{K})$ とします．
(1) $A^2 = O_n$ ならば $I + A$ が正則であることを示しましょう．
(2) $A^r = O_n$ $(r \geq 1)$ ならば $I + A$ が正則であることを示しましょう．

解答 (1)

$$(I + A)(I - A) = I - A^2 = I, \quad (I - A)(I + A) = I - A^2 = I$$

から $I + A$ は正則で $(I + A)^{-1} = I - A$ であることが分かります．

(2)

$$g(t) = 1 - t + t^2 - + \cdots + (-1)^{r-1} t^{r-1}$$

とすると

$$(1+t)g(t) = 1 - (-1)^r t^r$$

となりますから

$$(I + A)g(A) = I - (-1)^r A^r = I, \quad g(A)(I + A) = I - (-1)^r A^r = I$$

が成立することが分かります．従って $I + A$ は正則で $(I + A)^{-1} = g(A)$ であることが示されました．

IV $A \in M_n(\mathbf{K})$ が $A^2 = A$ を満たすとします．
(1) $\mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A)$ が成立することを示しましょう．
(2) $\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(I - A)$ が成立することを示しましょう．
(3) $\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A)$　が成立することを示しましょう．

解答 (1) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n$ が

$$\vec{x} \in \mathrm{Im}(A),\ \vec{y} \in \ker(A),\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$$

を満たすとします．$\vec{z} \in \mathrm{Im}(A)$ であるので $\vec{x} = A\vec{z}$ を満たす $\vec{z} \in \mathbf{K}^n$ が存在しますから

$$A\vec{z} + \vec{y} = \vec{0}$$

となります．この両辺に A を掛けると $\vec{y} \in \ker(A)$ から

$$A^2\vec{z} + \vec{0} = \vec{0}$$

となります．ここで $A^2 = A$ を用いると

$$A\vec{z} = \vec{0} \quad 従って \quad \vec{x} = A\vec{z} = \vec{0}$$

となります．$\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ を仮定していますから $\vec{y} = \vec{0}$ も成立します．以上で

$$\mathrm{Im}(A) \oplus \ker(A)$$

と直和になることが分かります．
(2) $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ とすると

$$\vec{x} = A\vec{x} + (I - A)\vec{x}$$

から

$$\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(I - A)$$

であることが分かります．この右辺の和が直和であることを示すために，$\vec{x} \in \mathrm{Im}(A), \vec{y} \in \mathrm{Im}(I - A)$ が

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$$

を満たすとします．さらに $\vec{x} = A\vec{x}_0$, $\vec{y} = (I - A)\vec{y}_0$ を満たす $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in \mathbf{K}^n$ が存在しますから

$$A\vec{x}_0 + (I - A)\vec{y}_0 = \vec{0} \qquad (\#)$$

が成立します．ここで $A(I-A)=A-A^2=O_n$ であることに注意しましょう．すると (#) の両辺に A を掛けると

$$A^2\vec{x}_0+A(I-A)\vec{y}_0=A^2\vec{x}_0+O_n\vec{y}_0=A^2\vec{x}_0=\vec{0}$$

であることが分かります．$A^2=A$ ですから

$$\vec{x}=A\vec{x}_0=A^2\vec{x}_0=\vec{0}\quad \text{従って}\quad \vec{y}=\vec{0}$$

が分かります．以上で

$$\mathbf{K}^n=\mathrm{Im}(A)\oplus\mathrm{Im}(I-A)$$

であることが分かります．

(3) $\vec{y}\in\mathrm{Im}(I-A)$ とします．すると

$$\vec{y}=(I-A)\vec{y}_0$$

を満たす $\vec{y}_0\in\mathbf{K}^n$ が存在します．この両辺に A を掛けると

$$A\vec{y}=A(I-A)\vec{y}_0=(A-A^2)\vec{y}_0=O_n\vec{y}_0=\vec{0}$$

から $\vec{y}\in\ker(A)$ であることが分かります．従って

$$\mathrm{Im}(I-A)\subset\ker(A)$$

であることが示されました．このことから

$$\mathbf{K}^n=\mathrm{Im}(A)\oplus\mathrm{Im}(I-A)\subset\mathrm{Im}(A)\oplus\ker(A)\subset\mathbf{K}^n$$

となり

$$\mathbf{K}^n=\mathrm{Im}(A)\oplus\mathrm{Im}(I-A)=\mathrm{Im}(A)\oplus\ker(A)=\mathbf{K}^n$$

であることが示されました．

V 以下の行列式を因数分解しましょう．

(1) $\begin{vmatrix} a & bc & b+c \\ b & ca & c+a \\ c & ab & a+b \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & ab & a+b \\ 1 & bc & b+c \\ 1 & ca & c+a \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ b & b+c+2a & c \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & bc & b+c \\ b & ca & c+a \\ c & ab & a+b \end{vmatrix}&=\begin{vmatrix} a & bc & a+b+c \\ b & ca & a+b+c \\ c & ab & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & bc & 1 \\ b & ca & 1 \\ c & ab & 1 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & bc & 1 \\ b-a & c(a-b) & 0 \\ c-a & b(a-c) & 0 \end{vmatrix}\\ &=(a+b+c)(a-b)(c-a)\begin{vmatrix} a & bc & 1 \\ -1 & c & 0 \\ 1 & -b & 0 \end{vmatrix}=(a+b+c)(a-b)(c-a)\begin{vmatrix} -1 & c \\ 1 & -b \end{vmatrix}\\ &=(a+b+c)(a-b)(c-a)(b-c)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\left\{(a^2+ac+c^2)-(a^2+ab+b^2)\right\} \\
&= (b-a)(c-a)\left(a(c-b)+c^2-b^2\right) \\
&= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c) \\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & ab & a+b \\ 1 & bc & b+c \\ 1 & ca & c+a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & ab & a+b \\ 0 & b(c-a) & c-a \\ 0 & a(c-b) & c-b \end{vmatrix} \\
&= (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & ab & a+b \\ 0 & b & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} b & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\
&= (c-a)(c-b)(b-a) \\
&= (a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ b & b+c+2a & c \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & c \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix} \\
&= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & c \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} \\
&= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & c-b \\ 0 & a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3
\end{aligned}$$