

I 教科書第8章にある

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

によって  $\mathbf{K}^3$  を

$$\mathbf{K}^3 = V(-1) \oplus V(0) \oplus V(9)$$

とスペクトル分解します。任意の  $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$  に対してこの分解に応じて

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

と分解するとき

$$P_j \vec{v} = v_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

と  $P_j \in M_3(\mathbf{K})$  を用いて表されました。このとき

$$P_1 + P_2 + P_3 = I_3, \quad P_j^2 = P_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad P_i P_j = O_3 \quad (i \neq j)$$

が成立することを示しましょう。ただし固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

と因数分解されるときに C-H の定理によって

$$\Phi_A(A) = (A - \alpha_1 I_3)(A - \alpha_2 I_3)(A - \alpha_3 I_3) = O_3$$

が成立することは用いて構いません。また具体的に  $P_j$  を求めて示しましょう。

解答

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &:= \frac{(\lambda - 0)(\lambda - 9)}{(-1 - 0)(-1 - 9)} = \frac{1}{10}\lambda(\lambda - 9) \\ f_2(\lambda) &:= \frac{(\lambda - (-1))(\lambda - 9)}{(0 - (-1))(0 - 9)} = -\frac{1}{9}(\lambda + 1)(\lambda - 9) \\ f_3(\lambda) &:= \frac{(\lambda - (-1))(\lambda - 0)}{(9 - (-1))(9 - 0)} = -\frac{1}{90}(\lambda + 1)\lambda \end{aligned}$$

と定義します。このとき

$$\begin{aligned} f_1(-1) &= 1, & f_1(0) &= 0, & f_1(9) &= 0 \\ f_2(-1) &= 0, & f_2(0) &= 1, & f_2(9) &= 0 \\ f_3(-1) &= 0, & f_3(0) &= 0, & f_3(9) &= 1 \end{aligned}$$

が成立します。一般に  $A \in M_3(\mathbf{K})$ ,  $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ ,  $\alpha \in \mathbf{K}$  が

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v}$$

を満たすならば,  $g(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$  に対して

$$g(A)\vec{v} = g(\alpha)\vec{v}$$

が成立します. そこで  $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$  に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(-1), \vec{v}_2 \in V(0), \vec{v}_3 \in V(3) \quad (1)$$

とスペクトル分解をすると

$$\begin{aligned} f_1(A)\vec{v} &= f_1(A)\vec{v}_1 + f_1(A)\vec{v}_2 + f_1(A)\vec{v}_3 = f_1(-1)\vec{v}_1 + f_1(0)\vec{v}_2 + f_1(9)\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \\ f_2(A)\vec{v} &= f_2(A)\vec{v}_1 + f_2(A)\vec{v}_2 + f_2(A)\vec{v}_3 = f_2(-1)\vec{v}_1 + f_2(0)\vec{v}_2 + f_2(9)\vec{v}_3 = \vec{v}_2 \\ f_3(A)\vec{v} &= f_3(A)\vec{v}_1 + f_3(A)\vec{v}_2 + f_3(A)\vec{v}_3 = f_3(-1)\vec{v}_1 + f_3(0)\vec{v}_2 + f_3(9)\vec{v}_3 = \vec{v}_3 \end{aligned}$$

が成立しますから

$$P_1 = f_1(A), \quad P_2 = f_2(A), \quad P_3 = f_3(A)$$

であることが分かります.

次に

$$f_1(\lambda) + f_2(\lambda) + f_3(\lambda) = 1$$

が恒等的に成立することに注意します. 両辺が 2 次式以下で  $\lambda = -1, 0, 9$  で成立するからです. これから

$$P_1 + P_2 + P_3 = I_3 \quad (2)$$

が従います. (2) 自体は分解 (1) に

$$\vec{v}_1 = P_1\vec{v}, \quad \vec{v}_2 = P_2\vec{v}, \quad \vec{v}_3 = P_3\vec{v}$$

を代入して

$$\vec{v} = P_1\vec{v} + P_2\vec{v} + P_3\vec{v} = (P_1 + P_2 + P_3)\vec{v}$$

を導いて示すこともできます. 次に

$$P_i P_j = O_3 \quad (i \neq j) \quad (3)$$

が成立することを  $P_1 P_2 = O_3$  で示しましょう.

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda) = -\frac{1}{90}(\lambda+1)\lambda(\lambda-9)^2 = -\frac{1}{90}(\lambda-9)\Phi_A(\lambda)$$

となりますから

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 = -\frac{1}{90}(A - 9I_3)\Phi_A(A) = -\frac{1}{90}(A - 9I_3)O_3 = O_3$$

が従います. ここで Cayley-Hamilton の定理

$$\Phi_A(A) = (A + I_3)A(A - 9I_3) = O_3$$

が成立することを用いました. 次に

$$P_i^2 = P_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

を示します.  $i = 1$  のとき

$$P_1 = P_1(P_1 + P_2 + P_3) = P_1^2 + P_1 P_2 + P_1 P_3 = P_1^2 + O_3 + O_3 = P_1^2$$

となりますが,  $i = 2, 3$  の場合も同様です.

**補足** 任意の  $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$  を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(-1), \vec{v}_2 \in V(0), \vec{v}_3 \in V(9)$$

とスペクトル分解します. このとき  $\vec{v}_1$  をスペクトル分解すると

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{0} + \vec{0}, \quad \vec{v}_1 \in V(-1), \vec{0} \in V(0), \vec{0} \in V(9)$$

となります.  $\vec{v}_1 = P_1 \vec{v}$ ,  $P_1 \vec{v}_1 = \vec{v}_1$ ,  $P_2 \vec{v}_1 = \vec{0}$  であることに注意すると

$$P_1^2 \vec{v}_1 = P_1 \vec{v}_1, \quad P_2 P_1 \vec{v} = \vec{0}$$

であることがわかりますから

$$P_1^2 = P_1, \quad P_1 P_2 = O_3$$

が従います.

**II** 以下の対称行列  $A$  を直交行列で対角化して  $A$  が定める 2 次形式を対応する直交座標変換で簡単にしましょう.

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} & \text{(2)} \quad A &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \text{(3)} \quad A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{(4)} \quad A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} \quad A &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**解答 (1)**

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)^2(\lambda-8) \end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = 2$  (重根),  $8$  であることがわかります.

次に固有ベクトルを求めます.

**(i)  $\lambda = 2$  のとき**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y - 2z = 0$$

であることがわかりますから, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります。ここで平行でない

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を正規直交化します。まず  $\vec{p}_1$  を正規化して

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\|\vec{p}_1\|} \vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定めます。さらに  $\vec{p}_2$  の  $\vec{p}_1$  方向への直交射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{p}_2, \vec{p}_1)}{\|\vec{p}_1\|^2} \vec{p}_1 = \frac{2}{2} \vec{p}_1 = \vec{p}_1$$

となりますから、 $\vec{r}_1$  に垂直なベクトルである  $\vec{p}_2 - \vec{w}$  は

$$\vec{p}_2 - \vec{w} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と求められます。これを正規化して

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{\|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\|} (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = 1, \quad (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

が分かります。これが  $V(2)$  の正規直交基底となります。

(ii)  $\lambda = 10$  のとき

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}z, \quad y = \frac{1}{2}z \end{aligned}$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります。  $\|\vec{r}_3\| = 1$  となるように

$$\vec{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると、一般論から  $V(2) \perp V(8)$  であることが分かりますから

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

が従います。よって  $R = (\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_3)$  は直交行列であることが分かります。このとき

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2 \ A\vec{r}_3) = (2\vec{r}_1 \ 2\vec{r}_2 \ 8\vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3) \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

と対角化されます。このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって  $A$  が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \left( {}^t R A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \left( {}^t R A R \cdot {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right) = 2\xi^2 + 2\eta^2 + 8\zeta^2 \end{aligned}$$

と変換されます。

(2)

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & 2 \\ -4 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ -4 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-9 & 2 \\ 0 & 4 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-9 & 2 \\ 4 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda-10) \end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = 1$  (重根),  $10$  であることが分かります。

次に固有ベクトルを求めます。

(i)  $\lambda = 1$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + 2y - z = 0$$

であることが分かりますから、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + 2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0 \text{ OR } y \neq 0)$$

となります。ここで平行でない

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を正規直交化します。まず  $\vec{p}_1$  を正規化して

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\|\vec{p}_1\|} \vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めます。さらに  $\vec{p}_2$  の  $\vec{p}_1$  方向への直交射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{p}_2, \vec{p}_1)}{\|\vec{p}_1\|^2} \vec{p}_1 = \frac{4}{5} \vec{p}_1$$

となりますから、 $\vec{r}_1$  に垂直なベクトルである  $\vec{p}_2 - \vec{w}$  は

$$\vec{p}_2 - \vec{w} = \vec{p}_2 - \frac{4}{5} \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と求められます。これを正規化して

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{\|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\|} (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = 1, \quad (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

が分かります。これが  $V(1)$  の正規直交基底となります。

(ii)  $\lambda = 8$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x = -2z, \quad y = -2z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります。  $\|\vec{r}_3\| = 1$  となるように

$$\vec{r}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると、一般論から  $V(1) \perp V(10)$  であることが分かりますから

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

が従います。よって  $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3)$  は直交行列であることが分かります。このとき

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2 \ A\vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ 10\vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$$

と対角化されます。このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって  $A$  が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \left( {}^t R A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \left( {}^t R A R \cdot {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right) = \xi^2 + \eta^2 + 10\eta^2 \end{aligned}$$

と変換されます.

(3)

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda-3)(\lambda-4) \end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = 0, 3, 4$  であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i)  $\lambda = 0$  のとき

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x - z = 0, \quad y - 2z = 0 \end{aligned}$$

であることが分かりますから, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります. 特に  $\|\vec{r}_1\| = 1$  を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(ii)  $\lambda = 3$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - z = 0, \quad y + z = 0$$

であることが分かりますから, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります。特に  $\|\vec{r}_2\| = 1$  を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします。

(iii)  $\lambda = 4$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + z = 0, \quad y = 0$$

であることがわかりますから、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります。特に  $\|\vec{r}_3\| = 1$  を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします。

一般論から

$$V(0) \perp V(3), \quad V(0) \perp V(4), \quad V(3) \perp V(4)$$

であることがわかりますから

$$(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が従います。さらに

$$\|\vec{r}_j\| = 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

と  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  を選んでいます。よって  $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3)$  は直交行列であることがわかります。このとき

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2 \ A\vec{r}_3) = (0\vec{r}_1 \ 3\vec{r}_2 \ 4\vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

と対角化されます。このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって  $A$  が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \left( {}^t R A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \left( {}^t R A R \cdot {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right) = 3\eta^2 + 4\zeta^2 \end{aligned}$$



と変換されます.

(4)

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -2 \\ 1 & \lambda-6 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda-6 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-6 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 0 & \lambda-6 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-7)\end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = 1, 4, 7$  であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i)  $\lambda = 1$  のとき

$$\begin{aligned}A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x + z = 0, \quad y = 0\end{aligned}$$

であることが分かりますから, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります. 特に  $\|\vec{r}_1\| = 1$  を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(ii)  $\lambda = 4$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - z = 0, \quad y - z = 0$$

であることが分かりますから, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります. 特に  $\|\vec{r}_2\| = 1$  を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(iii)  $\lambda = 7$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - z = 0, \quad y + 2z = 0$$

であることがわかりますから、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります。特に  $\|\vec{r}_3\| = 1$  を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします。

一般論から

$$V(1) \perp V(4), \quad V(1) \perp V(7), \quad V(4) \perp V(7)$$

であることがわかりますから

$$(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が従います。さらに

$$\|\vec{r}_j\| = 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

と  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  を選んでいます。よって  $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3)$  は直交行列であることがわかります。このとき

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2 \ A\vec{r}_3) = (1\vec{r}_1 \ 4\vec{r}_2 \ 7\vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

と対角化されます。このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって  $A$  が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \left( {}^t R A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \left( {}^t R A R \cdot {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right) = \xi^2 + 4\eta^2 + 7\zeta^2 \end{aligned}$$

と変換されます。

(5)

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ 0 & \lambda-5 & \lambda-5 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5) \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-5) \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-5) \begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-5)^2(\lambda+4)\end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = 5$  (重根),  $-4$  であることが分かります。

次に固有ベクトルを求めます。

(i)  $\lambda = 5$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y - 2z = 0$$

であることが分かりますから、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります。ここで平行でない

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を正規直交化します。まず  $\vec{p}_1$  を正規化して

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\|\vec{p}_1\|} \vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定めます。さらに  $\vec{p}_2$  の  $\vec{p}_1$  方向への直交射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{p}_2, \vec{p}_1)}{\|\vec{p}_1\|^2} \vec{p}_1 = -\frac{4}{5} \vec{p}_1$$

となりますから、 $\vec{r}_1$  に垂直なベクトルである  $\vec{p}_2 - \vec{w}$  は

$$\vec{p}_2 - \vec{w} = \vec{p}_2 + \frac{4}{5} \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と求められます。これを正規化して

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{\|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\|} (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = 1, \quad (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

が分かります。これが  $V(5)$  の正規直交基底となります。

(ii)  $\lambda = -4$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2}z = 0, \quad y + z = 0$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります。  $\|\vec{r}_3\| = 1$  となるように

$$\vec{r}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると、一般論から  $V(5) \perp V(-4)$  であることが分かりますから

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

が従います。よって  $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3)$  は直交行列であることが分かります。このとき

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2 \ A\vec{r}_3) = (5\vec{r}_1 \ 5\vec{r}_2 \ -4\vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3) \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

と対角化されます。このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって  $A$  が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= \left( {}^t R A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \left( {}^t R A R \cdot {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^t R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \right) = 5\xi^2 + 5\eta^2 - 4\zeta^2 \end{aligned}$$

と変換されます。

III  $A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & -6 \\ 5 & -2 & -3 \\ 27 & -9 & -10 \end{pmatrix}$  とします。以下では

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

であることを用いても構いません。  $A$  が対角化できないことを示しましょう。

解答 解答 1

$$(A + I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 16 & -5 & -6 \\ 5 & -1 & -3 \\ 27 & -9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -5 & -6 \\ 5 & -4 & -3 \\ 27 & -9 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 38 & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq O_3$$

から  $A$  が対角化可能でないことが分かります。

解答 2  $\dim V(-1) \geq 2$  とすると  $(\lambda + 1)^2 | \Phi_A(\lambda)$  となりますから、あり得ません。従って

$$\dim V(-1) = 1$$

であることが分かります。さらに

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -6 \\ 5 & -4 & -3 \\ 27 & -9 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 13 & -5 & -6 \\ 5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から  $\dim V(2) = 1$  が分かります。以上から

$$\dim(V(-1) \oplus V(2)) = 2$$

となりますから

$$V(-1) \oplus V(2) \subsetneq \mathbf{K}^3$$

となります。従って  $A$  は対角化可能ではありません。

**IV**  $P \in M_n(\mathbf{R})$  に対して

$$(P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^n) \quad (1)$$

と

$$\|P\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \quad (\vec{v} \in \mathbf{R}^n) \quad (2)$$

が必要十分であることを証明しましょう。

解答 (1) $\Rightarrow$ (2)

(1) において  $\vec{w} = \vec{v}$  の場合を考えると

$$\|P\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$$

となりますから、(2) が従います。

(2) $\Rightarrow$ (1)  $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$  に対して

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{4} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2)$$

が成立することを用います。実際

$$\begin{aligned} (P\vec{v}, P\vec{w}) &= \frac{1}{4} (\|P\vec{v} + P\vec{w}\|^2 - \|P\vec{v} - P\vec{w}\|^2) = \frac{1}{4} (\|P(\vec{v} + \vec{w})\|^2 - \|P(\vec{v} - \vec{w})\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2) = (\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

と (2) から (1) を導くことができます。

V 3 次の直交行列の全体を  $O(3)$  とします.  $P_1, P_2 \in O(3)$  ならば  $P_1P_2 \in O(3), {}^tP_1 \in O(3)$  であることを示しましょう

解答

$$\begin{aligned}(P_1P_2)P_1P_2 &= {}^tP_2 {}^tP_1P_1P_2 \\ &= {}^tP_2I_3P_2 = {}^tP_2P_2 = I_3 \\ P_1P_2(P_1P_2) &= P_1P_2 {}^tP_2 {}^tP_1 \\ &= P_1I_3 {}^tP_1 = P_1 {}^tP_1 = I_3\end{aligned}$$

から  $P_1P_2$  が直交行列であることが分かります. 他方

$$\begin{aligned}{}^t({}^tP_1) {}^tP_1 &= P_1 {}^tP_1 = I_3 \\ {}^tP_1 {}^t({}^tP_1) &= {}^tP_1P_1 = I_3\end{aligned}$$

から  ${}^tP_1$  が直交行列であることが分かります.

VI  $A \in M_3(\mathbf{R})$  は対称とします.  $A$  が定める 2 次形式は正定値、すなわち

$$(A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

が成立するとします.

- (1)  $A$  が正則であることを示しましょう.
- (2)  $A^{-1}$  が対称であることを示しましょう.
- (3)  $A^{-1}$  が定める 2 次形式が正定値であること、すなわち

$$(A^{-1}\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

であることを示しましょう.

解答 (1) (解 1)

$$A \in M_n(\mathbf{K}) \text{ に対して (i) } A \text{ は正則} \Leftrightarrow \text{(ii) } (A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}) \Leftrightarrow \text{(iii) } \det(A) \neq 0$$

が成立することを用います.  $A$  が正則でないとするときある  $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$  が

$$A\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

が成立しますが,

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

となりますが, これは  $A$  が定める 2 次形式が正定値であることに反します. よって  $A$  は正則であることが分かります.

(解 2)

対称な  $A \in M_3(\mathbf{R})$  に対して

$$(i)(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow (ii)A \text{の固有値 } \alpha, \beta, \gamma > 0 \\ \Leftrightarrow (iii)a_{11} > 0, \det(A_2) > 0, \det(A) > 0$$

が成立します。ただし  $A = \begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix}$  に対して  $A_2 = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}$  と定めています。

これを用いると  $\det(A) > 0$  から  $A$  が正則であることが分かります。

(2)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$$

の各辺の転置行列を考えると

$${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tA{}^t(A^{-1}) = I_3$$

が成立します。  $A$  が対称ですから

$${}^t(A^{-1})A = A{}^t(A^{-1}) = I_3$$

となりますが、逆行列の一意性から

$$A^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

が導かれます。従って  $A^{-1}$  が対称であることが分かります。

(3) (解 1) 任意の  $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$  が  $\vec{x} \neq \vec{0}$  を満たすとします。このとき  $\vec{y} = A^{-1}\vec{x}$  に対して  $\vec{y} \neq \vec{0}$  が成立します。ここで

$$(A^{-1}\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{y}, A\vec{y}) > 0$$

となりますから  $A^{-1}$  が正定値な 2 次形式を定めることが分かります。

(解 2)  $A$  を直交行列で

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

と対角化します。このとき両辺の逆行列は

$${}^tPA^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & & \\ & \frac{1}{\beta} & \\ & & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

となります。これから  $A^{-1}$  の固有値は

$$\Phi_{A^{-1}}(\lambda) = \Phi_{{}^tPA^{-1}P}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\alpha} & & \\ & \lambda - \frac{1}{\beta} & \\ & & \lambda - \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\lambda - \frac{1}{\beta}\right) \left(\lambda - \frac{1}{\gamma}\right)$$

から  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma} > 0$  となります。このことから  $A^{-1}$  が定める 2 次形式が正定値であることが従います。

**VII**  $A \in M_{m,3}(\mathbf{R})$  とします。すなわち  $A$  が  $m \times 3$  型の行列とします。  $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$  と列ベクトル表示をします。また  $B = {}^tAA$  と定めます。

(1)  $B$  が非負定値であること、すなわち

$$(B\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^3)$$

が成立することを示しましょう。

(2)  $B$  が正定値であることと  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が線型独立であることが必要十分であることを示しましょう。

**解答 (1)**

$$(B\vec{v}, \vec{v}) = ({}^tA\vec{v}, \vec{v}) = (A\vec{v}, A\vec{v}) = \|A\vec{v}\|^2 \geq 0 \quad (10)$$

から  $B$  が定める 2 次形式が非負定値であることが分かります。

(2)  $B$  が定める 2 次形式が正定値であるとします。このとき (10) において  $\vec{v} \neq \vec{0}$  ならば  $\|A\vec{v}\|^2 \neq 0$  従って

$$A\vec{v} \neq \vec{0} \quad \text{すなわち} \quad v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c} \neq \vec{0}$$

が分かります。これは対偶をとると

$$v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

となりますから  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が線型独立であることを意味します。

逆に  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が線型独立であると仮定します。これは

$$\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow A\vec{v} \neq \vec{0}$$

と必要十分です。これから

$$\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow 0 < \|A\vec{v}\|^2 = (B\vec{v}, \vec{v})$$

が従います。



VIII  $B \in M_3(\mathbf{R})$  は対称とします。

(1)  $B$  が非負定値であることと  $B$  の固有値  $\alpha, \beta, \gamma$  が

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

であることが必要十分であることを示しましょう。

(2)  $B$  が非負定値であるとき  $B$  が正定値であることと  $\det(B) > 0$  が必要十分であることを示しましょう。

解答 (1)

$B$  が非負定値の 2 次形式を定めるとします。  $B$  を直交行列  $P$  で

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \quad (11)$$

と対角化します。このとき

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \quad A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

となりますが

$$0 \leq (B\vec{p}_1, \vec{p}_1) = (\alpha\vec{p}_1, \vec{p}_1) = \alpha \cdot \|\vec{p}_1\|^2 = \alpha$$

から  $\alpha \geq 0$  が分かります。同様に  $\beta, \gamma \geq 0$  も分かります。

逆に,  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$  とします。上で考えた  $B$  の直交行列による対角化を用います。すなわち  $P$  が定める直交座標変換  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$  を用いると

$$\left( B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 \geq 0$$

となりますから,  $B$  が定める 2 次形式は非負定値であることが分かります。

(2)  $B$  が定める 2 次形式が正定値であると仮定します。 このとき,  $B$  の固有値は  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  となります。このとき (11) の行列式を考えると

$$\det(B) = \det({}^t P B P) = \alpha\beta\gamma > 0$$

となります。

逆に  $\det(B) > 0$  と仮定します。 このとき

$$\alpha\beta\gamma = \det(B) > 0$$

から

$$\alpha, \beta, \gamma \neq 0$$

が分かります。  $B$  が非負定値の 2 次形式を定めることを前提としていますから,

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

が成立しています。以上を合わせて

$$\alpha, \beta, \gamma > 0$$

が従います。