L12 2020 年 10 月 23 日演習問題解答

I $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ とします。Cayley-Hamilton の定理を用いて B^{-1} を計算しましょう.

解答 まず B の固有多項式を求めます.

$$\begin{aligned}
\Phi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & 4-\lambda \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-3) \\
&= \lambda^3 - 9\lambda + 26\lambda - 24
\end{aligned}$$

から Cayley-Hamilton の定理によって

$$B^3 - 9B^2 + 26B - 24I_3 = O_3$$

であることが分かります. 両辺に B^{-1} を掛けると

$$B^{-1} = \frac{1}{24}(B^2 - 9B + 26I_3)$$

が従います.

II $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ とします。

(1) A の固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

であることを示しましょう。

(2) 直和分解

$$\mathbf{K}^3 = V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$$

において $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

と直和分解（スペクトル分解）するとき

$$f_i(A)\vec{v} = \vec{v}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

となる多項式 $f_i(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ を求めましょう。

(3) (2) を用いて B^n を B^2, B, I_3 で表しましょう。

解答 (1)

$$
\begin{aligned}
\Phi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f_1(\lambda) &= \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda-3) \\
f_2(\lambda) &= \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{(2-1)(2-3)} = -(\lambda-1)(\lambda-3) \\
f_3(\lambda) &= \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)
\end{aligned}
$$

(3) $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_j \in V(j)\ (j = 1, 2, 3)$$

とスペクトル分解します．すると

$$
\begin{aligned}
B^n\vec{v} &= 1^n\vec{v}_1 + 2^n\vec{v}_2 + 3^n\vec{v}_3 \\
&= \left\{\frac{1}{2}(B-2I_3)(B-3I_3) - 2^n(B-I_3)(B-3I_3) + \frac{3^n}{2}(B-I_3)(B-2I_3)\right\}\vec{v}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
B^n &= \frac{1}{2}(B-2I_3)(B-3I_3) - 2^n(B-I_3)(B-3I_3) + \frac{3^n}{2}(B-I_3)(B-2I_3) \\
&= \left(\frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2}\right)B^2 - \left(\frac{5}{2} - 4\cdot 2^n + \frac{3}{2}3^n\right)B + (3 - 3\cdot 2^n + 3^n)\, I_3
\end{aligned}
$$

であることが分かります．

III $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbf{R}$ とします。

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

に対して

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$$

が成立することを示しましょう。

解答略

IV $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ が対角化可能であることを示して、$\mathbf{K}^3$ をスペクトル分解しましょう（固有空間の直和で表す)。さらに各固有空間への射影を A で表わしましょう．

解答

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -6 \\ -3 & \lambda-1 & -6 \\ 3 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 \\ 3 & \lambda+5 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 1$(重根) であることが分かります.

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -3 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

の 1 列と 3 列が平行なので,

$$\mathrm{Rank(A - I_3) = 1}$$

であることが分かります．従って $\dim V(1) = \dim\ker(A - I_3) = 3 - 1 = 2$ となるので，A が対角化可能であることが示されました．このとき

$$\mathbf{R}^3 = V(-2) \oplus V(1)$$

であることが分かります．$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_{-2} + \vec{v}_1,\ \vec{v}_{-2} \in V(-2),\ \vec{v}_1 \in V(1)$$

とスペクトル分解すると

$$f_{-2}(\lambda) = \frac{\lambda-1}{-2-1} = -\frac{1}{3}(\lambda-1)$$
$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda+2}{1+2} = \frac{1}{3}(\lambda+2)$$

によって

$$\vec{v}_{-2} = f_{-2}(A)\vec{v}$$
$$\vec{v}_1 = f_1(A)\vec{v}$$

と表せます.

V $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とします。Cayley-Hamilton の定理を用いて A^n を計算しましょう.

解答 まず A の固有多項式を計算します.

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-9 & -2 & 4\\ 4 & \lambda-3 & -4\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5 & \lambda-5 & 0\\ 4 & \lambda-3 & -4\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & -4\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-7 & -4\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)$$

となります. λ^n を $\Phi_A(\lambda)$ で割ることを考えます.

$$\lambda^n=q(\lambda)\Phi_A(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$$

とすると

$$\begin{cases}3^2a+3b+c=3^n\\ 5^2a+5b+c=5^n\\ 7^2a+7b+c=7^n\end{cases}$$

が成立します.

$$B=\begin{pmatrix}3^2 & 3 & 1\\ 5^2 & 5 & 1\\ 7^2 & 7 & 1\end{pmatrix}\quad \text{とすると}\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -1\\ \frac{35}{8} & -\frac{21}{4} & \frac{15}{8}\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{aligned}a&=\frac{1}{8}\cdot 3^n-\frac{1}{4}\cdot 5^n+\frac{1}{8}\cdot 7^n\\ b&=-\frac{3}{2}\cdot 3^n+\frac{5}{2}\cdot 5^n-7^n\\ c&=\frac{35}{8}\cdot 3^n-\frac{21}{4}\cdot 5^n+\frac{15}{8}\cdot 7^n\end{aligned}$$

であることが分かります. このとき

$$A^n=\left(\frac{1}{8}\cdot 3^n-\frac{1}{4}\cdot 5^n+\frac{1}{8}\cdot 5^n\right)A^2+\left(-\frac{3}{2}\cdot 3^n+\frac{5}{2}\cdot 5^n-5^n\right)A+\left(\frac{35}{8}\cdot 3^n-\frac{21}{4}\cdot 5^n+\frac{15}{8}\cdot 5^n\right)I_3$$

であることが分かります.

Maxima による検算

```
(%i1) B: matrix([9,3,1],[25,5,1],[49,7,1]);
                                    [ 9   3  1 ]
                                    [          ]
(%o1)                               [ 25  5  1 ]
                                    [          ]
                                    [ 49  7  1 ]
(%i2) invert(B);
                                 [  1      1     1  ]
                                 [  -    - -     -  ]
                                 [  8      4     8  ]
                                 [                  ]
```

```
                              [    3    5           ]
(%o2)                         [ - -    -      - 1 ]
                              [    2    2           ]
                              [                     ]
                              [ 35       21   15   ]
                              [ --     - --   --   ]
                              [ 8         4    8   ]
(%i3)
```

> **VI** $A \in M_3(\mathbf{C})$ が $\det(A) \neq 0$ を満たします.
>
> $$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$
>
> のとき $\Phi_{A^{-1}}(\lambda)$ を求めましょう.

解答 正則な $P \in M_3(\mathbf{C})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

と三角化します. 両辺の行列式を考えると

$$|A| = |P^{-1}AP| = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$$

であることが分かります. 他方

$$\left(P^{-1}A^{-1}P\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

となります. この右辺を

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & x & y \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & z \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix}$$

として求めます. 実際

$$P^{-1}AP \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & x & y \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & z \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}a & y\alpha_1 + az + \frac{1}{\alpha_3}b \\ 0 & 1 & z\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$x = -\frac{a}{\alpha_1\alpha_2},\ z = -\frac{c}{\alpha_2\alpha_3},\ y = -\frac{1}{\alpha_1}\left(az + \frac{1}{\alpha_3}b\right)$$

とすると

$$B = \left(P^{-1}AP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

であることが分かります．このことから

$$\begin{aligned}\Phi_{A^{-1}}(\lambda) &= \Phi_{P^{-1}A^{-1}P}(\lambda)\\ &= \begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{\alpha_1} & * & * \\ 0 & \lambda-\frac{1}{\alpha_2} & * \\ 0 & 0 & \lambda-\frac{1}{\alpha_2}\end{vmatrix}\\ &= \left(\lambda-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\lambda-\frac{1}{\alpha_2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{\alpha_3}\right)\end{aligned}$$

であることが分かります．

VII $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ とします．$A \in M_3(\mathbf{K})$ があって

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)$$

を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{K}$ に対して満たします．このとき

$$\Phi_{f(A)}(\lambda)$$

を求めましょう．

解答 正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3\end{pmatrix}$$

と三角化します．このとき帰納法によって

$$P^{-1}A^{\ell}P = \begin{pmatrix}\alpha_1^{\ell} & a & b \\ 0 & \alpha_2^{\ell} & c \\ 0 & 0 & \alpha_3^{\ell}\end{pmatrix}$$

であることが分かります．

$$f(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

とすると

$$\begin{aligned}P^{-1}f(A)P &= f(P^{-1}AP)\\ &= a_m\begin{pmatrix}\alpha_1^m & * & * \\ 0 & \alpha_2^m & * \\ 0 & 0 & \alpha_3^m\end{pmatrix} + a_{m-1}\begin{pmatrix}\alpha_1^{m-1} & * & * \\ 0 & \alpha_2^{m-1} & * \\ 0 & 0 & \alpha_3^{m-1}\end{pmatrix} + \cdots + a_1\begin{pmatrix}\alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \alpha_3\end{pmatrix} + a_0I_3\\ &= \begin{pmatrix}f(\alpha_1) & * & * \\ 0 & f(\alpha_2) & * \\ 0 & 0 & f(\alpha_3)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．従って

$$\begin{aligned}\Phi_{f(A)}(\lambda) = \Phi_{P^{-1}f(A)P}(\lambda) &= \begin{vmatrix}\lambda-f(\alpha_1) & * & * \\ 0 & \lambda-f(\alpha_2) & * \\ 0 & 0 & \lambda-f(\alpha_3)\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-f(\alpha_1))(\lambda-f(\alpha_2))(\lambda-f(\alpha_3))\end{aligned}$$

であることが分かります.

VIII $f \in \mathbf{K}[\lambda]$, $p \in \mathbf{K}[\lambda]$ が与えられていて $p \neq 0$ とします。このとき任意の $f \in \mathbf{K}[\lambda]$ に対して

$$f(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda), \quad \deg(r) < \deg(p)$$

を満たす $q, r \in \mathbf{K}[\lambda]$ が存在することを示しましょう.

IX $\alpha \neq \beta$ とします。

$$d_1(t)(t-\alpha) + d_2(t)(t-\beta)^2 = 1$$

を満たす $d_1(t), d_2(t) \in \mathbf{k}[t]$ を求めましょう。

ヒント

$$\frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)^2} = \frac{A}{t-\alpha} + \frac{B+Ct}{(t-\beta)^2}$$

を満たす A, B, C を求めましょう。

解答　まず

$$\frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \left(\frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{t-\beta} \right)$$

を確認します. これから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)^2} &= \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \left(\frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)} - \frac{1}{(t-\beta)^2} \right) \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \cdot \left(\frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{t-\beta} \right) - \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \frac{1}{(t-\beta)^2} \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \cdot \frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \cdot \frac{t-\beta}{(t-\beta)^2} - \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \frac{1}{(t-\beta)^2} \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \cdot \frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \cdot \frac{t-2\beta+\alpha}{(t-\beta)^2}
\end{aligned}$$

となります. 各辺に $(t-\alpha)(t-\beta)^2$ を掛けると

$$1 = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \cdot (t-\beta)^2 - \frac{t-2\beta+\alpha}{(\alpha-\beta)^2} \cdot (t-\alpha)$$

となります.

X $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ は $\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$ を満たすとします。

(1)

$$d_1(t)(t-\beta)(t-\gamma) + d_2(t)(t-\alpha)(t-\gamma) + d_3(t)(t-\alpha)(t-\beta) = 1$$

を満たす $d_1(t), d_2(t), d_3(t) \in \mathbf{K}[t]$ を求めましょう。

(2)

$$d_1(t)(t-\alpha)^2 + d_2(t)(t-\beta)^2 = 1$$

を満たす $d_1(t), d_2(t) \in \mathbf{K}[t]$ を求めましょう。

解答 (1) まず

$$\frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left(\frac{1}{t-\alpha}-\frac{1}{t-\beta}\right) \tag{\#}$$

を確認します．これから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)} &= \frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left(\frac{1}{(t-\alpha)(t-\gamma)}-\frac{1}{(t-\beta)(t-\gamma)}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{\alpha-\gamma}\cdot\left(\frac{1}{t-\alpha}-\frac{1}{t-\gamma}\right)-\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{\beta-\gamma}\cdot\left(\frac{1}{t-\beta}-\frac{1}{t-\gamma}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\cdot\frac{1}{t-\alpha}+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\frac{1}{t-\beta}\\
&\quad -\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{(\beta-\gamma)-(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\cdot\frac{1}{t-\gamma}\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\cdot\frac{1}{t-\alpha}+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\cdot\frac{1}{t-\beta}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\cdot\frac{1}{t-\gamma}
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
1 = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\cdot(t-\beta)(t-\gamma)+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\cdot(t-\alpha)(t-\gamma)\\
+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\cdot(t-\alpha)(t-\beta)
\end{aligned}$$

が従います.

(2) (#) から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(t-\alpha)^2(t-\beta)^2} &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{1}{(t-\alpha)^2}-\frac{2}{(t-\alpha)(t-\beta)}+\frac{1}{(t-\beta)^2}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{1}{(t-\alpha)^2}-\frac{2}{(\alpha-\beta)}\cdot\frac{1}{t-\alpha}-\frac{2}{(\beta-\alpha)}\cdot\frac{1}{t-\beta}+\frac{1}{(t-\beta)^2}\right)\\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^3}\cdot\frac{(\alpha-\beta)-2(t-\alpha)}{(t-\alpha)^2}+\frac{1}{(\beta-\alpha)^3}\cdot\frac{(\beta-\alpha)-2(t-\beta)}{(t-\beta)^2}
\end{aligned}$$

を得ます．これから

$$1 = \frac{(\beta-\alpha)-2(t-\beta)}{(\beta-\alpha)^3}\cdot(t-\alpha)^2+\frac{(\alpha-\beta)-2(t-\alpha)}{(\alpha-\beta)^3}\cdot(t-\beta)^2$$

であることが分かります.