**2020 年 10 月 30 日演習問題解答**

**I** 以下では、実対称行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$(A\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 (\vec{x} \in \mathbf{R}^2) \Leftrightarrow A\text{の固有値}\alpha, \beta \geq 0$$
$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \text{のとき} a, b \geq 0, |A| \geq 0$$

であることを用います。$m \times 2$ 行列 $B = (\vec{a}\ \vec{b})$ に対して不等式

$$|(\vec{a}, \vec{b})| \leq ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$$

が成立することを示しましょう。さらに不等式の等号成立条件を求めましょう。

**解答** $B = {}^tAA$ は対称行列で，任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(B\vec{v}, \vec{v}) = ({}^tAA\vec{v}, \vec{v}) = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ||A\vec{v}||^2 \geq 0$$

が成立します．さらに

$$B = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||\vec{a}||^2 & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & ||\vec{b}||^2 \end{pmatrix}$$

が成立します．これから

$$\Big(|B| = ||\vec{a}||^2 \cdot ||\vec{b}||^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2 \geq 0\Big)$$

が成立します．これから

$$|(\vec{a}, \vec{b})| \leq ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$$

が従います．この等号成立の必要十分条件は $|B| = 0$ ですが，この条件は

$$\ker(B) = \ker({}^tAA) \neq \{\vec{0}\}$$

と必要十分です．他方，一般に

$$\ker({}^tAA) = \ker(A)$$

が成立しますから，条件は

$$\ker(A) \neq \{\vec{0}\}$$

と必要十分であることが分かります．$A = (\vec{a}\ \vec{b})$ に対してこの条件は

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$

と必要十分です．

**II** $\mathbf{R}^4$ の部分空間

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} ;\ \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$$

を定めます。そして $V$ の基底を

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

と取ります。

**(1)** $V_2 = \mathbf{R}\vec{q}_1 + \mathbf{R}\vec{q}_2$ の正規直交基底基底を求めましょう。

**(2)** $\vec{q}_2$ の $V_2$ への直交射影を求めて、$V$ の正規直交基底を求めましょう。

$\vec{w}_1$ を $\vec{q}_2$ の $\vec{q}_1$ 方向への直交射影とすると

$$\vec{w}_1 = \frac{(\vec{q}_2, \vec{q}_1)}{||\vec{q}_1||^2}\vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と求まります．ここで $\vec{q}_1$ に垂直な $V$ のベクトルとして

$$\vec{q}_2 - \vec{w}_1 = \vec{q}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれます．このとき

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{||\vec{q}_1||}\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{||\vec{q}_2 - \vec{w}_1||}(\vec{q}_2 - \vec{w}_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in V$ は正規直交系です．さらに $\vec{q}_3$ の $V_0 = \mathbf{R}\vec{p}_1 + \mathbf{R}\vec{p}_2$ への直交射影を $\vec{w}_2$ とすると

$$\vec{w}_2 = (\vec{q}_3, \vec{p}_1)\vec{p}_1 + (\vec{q}_3, \vec{p}_2)\vec{p}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となります．ここで $V_0$ に垂直な $V$ のベクトル $\vec{q}_3 - \vec{w}_2$ を大きさ 1 にして

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{||\vec{q}_3 - \vec{w}_2||}(\vec{q}_3 - \vec{w}_2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は $V$ の正規直交基底となります．

**III** $\vec{q}_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とします。

$$V := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{q}_1) = 0\}$$

と 2 次元の部分空間を定めます。このとき $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ の $V$ への正射影 $P\vec{x}$ は

$$P\vec{x} \in V, \quad \vec{x} - P\vec{x} \perp \vec{q}_1$$

で定まります。

**(1)** $P$ を行列で表しましょう。</dd>

**(2)** $V$ に関する鏡映

$$Q\vec{x} = \vec{x} + 2(P\vec{x} - \vec{x})$$

で定まる $Q$ を行列で表しましょう。

**解答 (1)**

$$\begin{aligned} P\vec{v} &= (\vec{q}_1, \vec{v})\vec{q}_1 = \vec{q}_1{}^t\vec{q}_1\vec{v} \\ &= \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)(1\ 1\ 1)\,\vec{v} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)\vec{v} \end{aligned}$$

から $Q = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)$

**(2)**

$$P = 2P - I = \frac{2}{3}\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{smallmatrix}\right)$$

**IV** 3 次の直交群

$$O(3) := \{P \in M_3(\mathbf{R});\ {}^tPP = P{}^tP = I_3\}$$

に対して以下を示しましょう.

**(1)** $P_1, P_2 \in O(3)$ ならば $P_1P_2 \in O(3)$ を示しましょう.

**(2)** $P \in O(3)$ ならば ${}^tP \in O(3)$ を示しましょう.

**解答 (1)**

$$\begin{aligned} {}^t\left(P_1P_2\right)P_1P_2 &= {}^tP_2{}^tP_1P_1P_2 = {}^tP_2I_3P_2 \\ &= {}^tP_2P_2 = I_3 \end{aligned}$$

から $P_1P_2 \in O(3)$ が分かります.

**別解** $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$(P_1P_2\vec{v}, P_1P_2\vec{w}) = (P_2\vec{v}, P_2\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$

から $P_1P_2 \in O(3)$ が分かります.

**(2)**

$${}^t\left({}^tP\right){}^tP = P{}^tP = I_3$$

から ${}^tP \in O(3)$ が分かります.