L14 2020 年 11 月 06 日演習問題解答

I $A \in M_n(\mathbf{K})$ の余因子行列を $\tilde{A}$ とします。このとき

$$|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$$

を示しましょう.

解答

$$\tilde{A}A = |A| \cdot I_n$$

の両辺の行列式を考えると

$$\left|\tilde{A}\right| \cdot |A| = |A|^n \tag{1}$$

であることが分かります.

(i)$|A| \neq 0$ のとき(1) の両辺を $|A| \neq 0$ で割ると

$$\left|\tilde{A}\right| = |A|^{n-1} \tag{2}$$

であることが分かります.

(ii)$|A| = 0$ のとき (a) $A = O_n$ のとき $\tilde{A} = O_n$ となりますから (2) が成立することが分かります.

(b) $A \neq O_n$ のとき (2) から

$$\tilde{A}A = O_n$$

が成立しますが，$|\tilde{A}| \neq 0$ が成立するならば $\tilde{A}$ が正則であることから $A = O_n$ となりますが，仮定 (b) に反します．従って $|\tilde{A}| = 0$ であることが分かります．これから (2) が成立することが分かります.

II（演習 4.22）行列 $\begin{pmatrix} 2 & -\lambda-1 & 2-\lambda \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 4-\lambda & -2-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$ が正則でないための必要十分条件を λ について求めましょう.

解答

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -\lambda-1 & 2-\lambda \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 4-\lambda & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -\lambda-1 & 2-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 2(4-\lambda) & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -\lambda-1 & 2-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 2 & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -\lambda-1 & 2-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)\lambda\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \lambda(4-\lambda)(-\lambda-1)
\end{aligned}$$

から $\lambda = -1, -, 4$ のとき A は正則でないことが分かります.

III（演習 4.23）行列 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数を a について場合分けをして求めましょう.

解答

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

から

$$a \neq 1, -2 \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = 3$$

であることが分かります.

$\underline{a = -2 \text{ のとき}}$行基本変形

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から $\mathrm{rank}(A) = 2$ であることが分かります.

$\underline{a = 1 \text{ のとき}}$行基本変形

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から $\mathrm{rank}(A) = 2$ であることが分かります.

IV 正方行列 $A \in M_{2n-1}(\mathbf{K})$ は交代行列とします。すなわち

$${}^tA = -A$$

を満たすとします。このとき

$$\det(A) = 0$$

であることを示しましょう.

解答

$$|A| = |{}^tA| = |-A| = (-1)^{2n-1}|A| = -|A|$$

から $|A| = 0$ であることが分かります.

V 正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ は直交行列とします．すなわち

$$ {}^tAA = A{}^tA = I_n $$

を満たすとします．このとき

$$ \det(A) = \pm 1 $$

であることを示しましょう．

解答

$$ {}^tAA = I_n $$

の両辺の行列式を考えると

$$ |{}^tAA| = |{}^tA| \cdot |A| = |A|^2, \quad |I_n| = 1 $$

から $|A|^2{=}1$ 従って $|A| = \pm 1$ であることが分かります．

VI 正方行列 $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$ \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B| $$

を示しましょう．

解答

$$ \begin{aligned} \left|\begin{smallmatrix} A & B \\ B & A \end{smallmatrix}\right| &= \left|\begin{array}{c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_n & \mathbf{b}_n \\ \hline \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{b}_n & \mathbf{a}_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_n & \mathbf{b}_n \\ \hline \mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_n+\mathbf{b}_n & \mathbf{a}_n+\mathbf{b}_n \end{array}\right| \\ &= \left|\begin{smallmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n & \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \\ \hline \vec{a}_1+\vec{b}_1 & \cdots & \vec{a}_n+\vec{b}_n & \vec{a}_1+\vec{b}_1 & \cdots & \vec{a}_n+\vec{b}_n \end{array}\right| \\ &= \left|\begin{array}{ccc|ccc} \vec{a}_1-\vec{b}_1 & \cdots & \vec{a}_n-\vec{b}_n & \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \\ \hline \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{a}_1+\vec{b}_1 & \cdots & \vec{a}_n+\vec{b}_n \end{array}\right| \\ &= \left|\begin{smallmatrix} A-B & B \\ O_n & A+B \end{smallmatrix}\right| = |A-B| \cdot |A+B| \end{aligned} $$

VII $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ に対して $\mathrm{tr}(A^5)$ を求めましょう．

解答 まず A の固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -\lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -\lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 0 & 4 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+8)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda=-2, 1\pm\sqrt{7}i$ であることが分かります．固有値がすべて単純なので A は対角化可能であることが従いますから，ある正則行列 $P \in M_3(\mathbf{C})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1+\sqrt{7}i & \\ & & 1-\sqrt{7}i \end{pmatrix}$$

が成立します．これから

$$P^{-1}A^5P = \begin{pmatrix} (-2)^5 & & \\ & (1+\sqrt{7}i)^5 & \\ & & (1-\sqrt{7}i)^5 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．従って

$$\mathrm{tr}(A^5) = \mathrm{tr}(P^{-1}A^5P) = (-2)^5 + (1+\sqrt{7}i)^5 + (1-\sqrt{7}i)^5$$

であることが分かります．さらに

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{7}i)^5 + (1-\sqrt{7}i)^5 &= 1 + 5\sqrt{7}i + 10(\sqrt{7}i)^2 + 10(\sqrt{7}i)^3 + 5(\sqrt{7}i)^4 + (\sqrt{7}i)^5 \\ &\quad + 1 - 5\sqrt{7}i + 10(\sqrt{7}i)^2 - 10(\sqrt{7}i)^3 + 5(\sqrt{7}i)^4 - (\sqrt{7}i)^5 \\ \\ &= 2 - 20\cdot 7 + 10\cdot 49 = 352\end{aligned}$$

となるので

$$\mathrm{tr}(A^5) = -32 + 352 = 320$$

であることが分かります．

Maxima による計算

```
(%i1) A:matrix([-1,1,2],[1,-1,2],[-2,-2,2]);
                                  [ - 1   1   2 ]
                                  [             ]
(%o1)                             [  1   - 1  2 ]
                                  [             ]
                                  [ - 2  - 2  2 ]
(%i2) eigenvalues(A);
(%o2)         [[1 - sqrt(7) %i, sqrt(7) %i + 1, - 2], [1, 1, 1]]
(%i5) A^^5;
                                [ 80   112   - 32 ]
                                [                 ]
(%o5)                           [ 112  80    - 32 ]
                                [                 ]
                                [ 32   32    160  ]
```

VIII $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ が定める 2 次形式が，正定値，非負定値，負定値，非正定値であるか考えましょう．

解答

$$(A\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 2 > 0$$

であるので，A が定める 2 次形式が非正定値，負定値でないことが分かります．次に 2 次形式を $y = 0$ に制限して

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}\right) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)\right)$$

から導かれる 2 次小行列について $\left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right| = -5 < 0$ が成立することに注意すると，$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ に負の固有値があることが分かります．従ってある $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$\left(A\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}\right) < 0$$

であることが従います．これから与えられた 2 次形式が非負定値でも正定値でもないことが分かります．

別解

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -30 < 0$$

であることから，A の固有値 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ に対して

$$\alpha, \beta, \gamma < 0$$

または

$$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$$

が成立するとしても構いません．$\alpha, \beta, \gamma < 0$ の場合は，2 次形式が負定値になってしまいますから，あり得ません．他方，$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$ の場合は固有値 $\gamma < 0$ の固有ベクトル $\vec{v}$ に対して

$$(\vec{v}, \vec{v}) = \gamma\|\vec{v}\|^2 < 0$$

が成立しますから，2 次形式が正定値，非正定値ではないことが分かります．

別解 2

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda-6 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ -1 & \lambda-6 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-6 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-7) \end{aligned}$$

から A の固有値が $\lambda = -1, 4, 7$ であることが分かります．$\lambda = -1$ が固有値であることから A が定める 2 次形式は正定値でも非負定値でもないことが分かります．他方，例えば $\lambda = 4$ が固有値であることから A が定める 2 次形式は負定値でも非正定値でもないことが分かります．

IX $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式が，正定値，非負定値，負定値，非正定値であるか考えましょう．

解答

$$(A\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 3 > 0$$

であるので，A が定める 2 次形式が非正定値，負定値でないことが分かります．次に 2 次形式を $x = 0$ に制限して

$$\left(A\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

から導かれる 2 次小行列について $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 < 0$ が成立することに注意すると，$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ に負の固有値があることが分かります．従ってある $\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$\left(A\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\right) < 0$$

であることが従います．これから与えられた 2 次形式が非負定値でも正定値でもないことが分かります．

別解

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

であることから，A の固有値 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ に対して

$$\alpha, \beta, \gamma < 0$$

または

$$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$$

が成立するとしても構いません．$\alpha, \beta, \gamma < 0$ の場合は，2 次形式が負定値になってしましますから，あり得ません．他方，$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$ の場合は固有値 $\gamma < 0$ の固有ベクトル $\vec{v}$ に対して

$$(\vec{v}, \vec{v}) = \gamma\|\vec{v}\|^2 < 0$$

が成立しますから，2 次形式が正定値，非正定値ではないことが分かります．

別解 2

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -3 \\ -2 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda+2 & -\lambda-2 \\ -2 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)(\lambda^2 - 7\lambda + 4)\end{aligned}$$

から A の固有値が $\lambda = -2, \frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$ であることが分かります．$\lambda = -2$ が固有値であることから A が定める 2 次形式は正定値でも非負定値でもないことが分かります．他方，例えば $\lambda = \frac{7+\sqrt{33}}{2}$ が固有値であることから A が定める 2 次形式は負定値でも非正定値でもないことが分かります．

X 実対称行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ について以下を考えます．$\alpha \in \mathbf{C}$ に対して条件

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

を満たす複素ベクトル $\vec{v} \in \mathbf{C}^n$ が存在すると仮定します．

(1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ に対して複素共役を $\vec{w} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$ と定めると

$$^t\vec{w}A = \bar{\alpha}^t\vec{w} \tag{i}$$

が成立することを導きましょう．

(2) (i) の両辺に左から A を掛けて $\alpha \in \mathbf{R}$ であることを示しましょう．

解答 (1) $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$ の複素共役は

$$A\vec{w} = \bar{\alpha}^t\vec{w}$$

となります．ここで $\bar{A} = A$ であることを用いました．次にこの等式の両辺の転置を考えると

$$^t\vec{w}A = \bar{\alpha}^t\vec{w}w$$

が従います．

(2) (i) の両辺に右から $\vec{v}$ を掛けると

$$LHS = {}^t\vec{w}A\vec{v} = {}^t\vec{w}(\alpha\vec{v}) = \alpha\left(|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2\right)$$
$$RHS = \bar{\alpha}^t\vec{w}\vec{v} = \bar{\alpha}\left(|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2\right)$$

となりますが，$\left(|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2\right) \neq 0$ であることに注意すると

$$\alpha\left(|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2\right) = \bar{\alpha}\left(|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2\right)$$

から $\alpha = \bar{\alpha}$ が従いますが，これは $\alpha \in \mathbf{R}$ であることを意味します．

XI $>\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ に対して

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 0,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 0,\ \alpha\beta\gamma \geq 0 \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

を示しましょう．

解答 $\gamma < 0$ として矛盾を導きます．$\alpha + \beta \leq 0$ とすると $\alpha + \beta + \gamma < 0$ となりますから

$$\alpha + \beta > 0$$

であることが従います．他方 $\gamma < 0$ と $\alpha\beta\gamma \geq 0$ から

$$\alpha\beta \leq 0 \tag{i}$$

が従います．$\alpha + \beta > 0$ と $\gamma < 0$ から $\gamma(\alpha + \beta) < 0$ となりますから

$$\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) \geq 0$$

から $\alpha\beta > 0$ となります．これは (i) と矛盾します．以上で $\gamma \geq 0$ が示されました．$\alpha, \beta \geq 0$ も同様に示せます．

XII >3 次の実対称行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{smallmatrix}\right)$ が条件

$$a, b, c \geq 0$$

$$\left|\begin{smallmatrix} a & p \\ p & b \end{smallmatrix}\right|,\ \left|\begin{smallmatrix} a & q \\ q & c \end{smallmatrix}\right|,\ \left|\begin{smallmatrix} b & r \\ r & c \end{smallmatrix}\right| \geq 0$$

$$|A| \geq 0$$

を満たすとき A の固有値 α, β, γ が

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\Phi_A(\lambda)\& = \lambda^3 - (a+b+c)\lambda^2 + \left(\left|\begin{smallmatrix} a & p \\ p & b \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} a & q \\ q & c \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} b & r \\ r & c \end{smallmatrix}\right|\right)\lambda - |A|$$

であることから

$$\alpha + \beta + \gamma = a + b + c \geq 0$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \left|\begin{smallmatrix} a & p \\ p & b \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} a & q \\ q & c \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} b & r \\ r & c \end{smallmatrix}\right| \geq 0$$

$$\alpha\beta\gamma = |A| \geq 0$$

であることが分かります．これは $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ と同値です．

XIII $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して微分方程式系

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

を解きましょう．

解答　A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

となりますから、固有値は $\lambda = 1 \pm i$ であることが分かります．$\lambda = 1 + i$ の固有ベクトル $\vec{w_1} = {}^t(z_1\ z_2)$ は

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z_1 = (-1+i)z_2$$

の解ですから、

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+i)z_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

と $z_2 \in \mathbf{C}$ を用いて表現できます．特に $z_2 = 1$ の場合を考えると、$\vec{w}_1$ と $\lambda = -1 - i$ の固有ベクトルで $\vec{w}_1$ の複素共役である $\vec{w}_2$ は

$$\vec{w}_1 = \left(\begin{array}{c} -1+i \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right) + i \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \ \vec{w}_2 = \left(\begin{array}{c} -1-i \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right) - i \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right)$$

より $\vec{w}_1$ の実部 $\vec{v}_1$ と虚部 $\vec{v}_2$ はそれぞれ

$$\vec{v}_1 = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right), \ \vec{v}_2 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right)$$

と計算されます．さらに

$$A\vec{v}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad A\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

を得ます．ここで $P = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2)$ と定めると P は正則で

$$AP = (A\vec{v}_1 \ A\vec{v}_2) = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2) \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right) = P \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right)$$

より

$$A = P \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right) P^{-1}$$

と標準化できます．ここで

$$\vec{u}(t) = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = P^{-1} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P^{-1}AP\vec{u}(t)$$

から $\vec{u}(t)$ は微分方程式

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}(t)$$

を満たします．

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -sint & \cos t \end{pmatrix}$$

と定めると

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X(t) = X(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立します．これから

$$\frac{d}{dt}X(t) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X(t) = -X(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

も成立します．ここで

$$\{X(-t)\vec{u}(t)\}' = -X(-t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}(t) + X(-t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}(t) = \vec{0}$$

が成立しますから

$$X(-t)\vec{u}(t) = \vec{c}$$

と定数であることが分かります．$t = 0$ を代入すると

$$X(-t)\vec{u}(t) = \vec{u}(0)$$

が従います．さらに $X(-t)X(t) = X(t)X(-t) = I_2$ も成立しますから

$$\vec{u}(t) = X(t)\vec{u}(0)$$

であることが分かります．元の座標で表すと

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = PX(t)P^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

と微分方程式の解が求まります．

XIV $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化しましょう。

解答 まず固有多項式を求めます．

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 5 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 2 \pm 2i$ であることが分かります．次に固有ベクトルを求めます．

$$(2 \pm 2i)I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 \pm 2i & 5 \\ -1 & -1 \pm 2i \end{pmatrix}$$

から

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2 \pm 2i)I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -x + (-1 \pm 2i)y = 0$$

であることが分かります．これから $\lambda = 2 \pm 2i$ の固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \pm 2i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

であることが分かります．ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 - 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$$

とさだめると P は正則となります．このとき

$$AP = P \begin{pmatrix} 2 + 2i & 0 \\ 0 & 2 - 2i \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 + 2i & 0 \\ 0 & 2 - 2i \end{pmatrix}$$

と A は対角化されます．

補足

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{2i}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned}
A\vec{q}_1 &= \frac{1}{2}\left((2+2i)\vec{p}_1 + (2-2i)\vec{p}_2\right) \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) - 2\cdot\frac{1}{2i}(\vec{p}_1-\vec{p}_2) = 2\vec{q}_1 + 2\vec{q}_2 \\
A\vec{q}_2 &= \frac{1}{2i}\left((2+2i)\vec{p}_1 - (2-2i)\vec{p}_2\right) \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) + 2\cdot\frac{1}{2i}(\vec{p}_1-\vec{p}_2) = -2\vec{q}_1 + 2\vec{q}_2
\end{aligned}$$

から

$$A(\vec{q}_1\ \vec{q}_2) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

が従います．さらに

$$(\vec{q}_1\ \vec{q}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}$$

において $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \neq 0$ から $Q := (\vec{q}_1\ \vec{q}_2)$ が正則であることが分かります．従って

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

と定数倍と回転行列の合成で表すことができます.