(略)答解

IV (1)

$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$ となる. $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ に対して

$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_3$ から $\mu_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$ となる.

$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき　$(A - I_3)^2 \vec{p_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ なので

$\vec{p_2} = (A - I_3)\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{p_3} = (A - I_3)^2 \vec{p_1} = (A - I_3)\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

とすると $P := (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})$ は正則で (一般論)

$A\vec{p_1} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$, $A\vec{p_2} = \vec{p_2} + \vec{p_3}$, さらに $(A - I_3)\vec{p_3} = (A - I_3)^3 \vec{p_1} = \vec{0}$

C-H.

から $A\vec{p_3} = \vec{p_3}$

従って　$AP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ から $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ がJordan標準形

である.

(2) は削除します.

(3) も削除します.

(4) $\Phi_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$, $(A-2I_3)(A-3I_3)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-5&3&-1\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&0\\-5&2&-1\\-2&0&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-3&1&-1\\6&-2&2\end{pmatrix}\neq O_3$

から $\mu_A(\lambda)=\Phi_A(\lambda)$ である.

次に $V(2)$, $V(3)$, $W(2)$ を求める.

$$A-2I_3=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-5&3&-1\\-2&0&-1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\-2&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$ から

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V(2)\iff\begin{cases}x+\frac{1}{2}z=0\\y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$$ よって $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\-\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}=\frac{z}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$A-3I_3=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-5&2&-1\\-2&0&-2\end{pmatrix}\to\to\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

から $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V(3)\iff\begin{cases}x+z=0\\y+2z=0\end{cases}$$ から $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z\\-2z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$(A-2I_3)^2=\begin{pmatrix}-4&2&-1\\-8&4&-2\\4&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ から

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W(2)\iff$ $=0$ となるので $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W(2)$ は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}z\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}y\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{z}{4}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$$

から $V(2)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $V(3)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $W(3)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$

$\vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ は $\vec{p_1}\in W(2)$, $\vec{p_1}\notin W(2)$ を満たす.

$\vec{p_2}:=(A-2I_3)\vec{p_1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-5&3&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\in V(2)$ となる.

$\vec{p_3}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\in V(3)$

とする. $c_1\vec{p_1}+c_2\vec{p_2}+c_3\vec{p_3}=\vec{0}$ とすると $W(2)\oplus V(3)=\mathbb{R}^3$ から $c_1\vec{p_1}+c_2\vec{p_2}=\vec{0}$, $c_3\vec{p_3}=\vec{0}$ となる. $\vec{p_3}\neq\vec{0}$ から $c_3=0$. さらに $c_1\vec{p_1}+c_2\vec{p_2}=\vec{0}$ の両辺に $(A-2I_3)$ をかけると $c_1\vec{p_2}=\vec{0}$. $\vec{p_2}\neq\vec{0}$ から $c_1=0$, これから $c_2\vec{p_2}=\vec{0}$ $\vec{p_2}\neq\vec{0}$ から $c_2=0$ となる. $\vec{p_1},\vec{p_2},\vec{p_3}$ は線形独立なので P は正則となる.

$$AP=(A\vec{p_1}\ \ A\vec{p_2}\ \ A\vec{p_3})=(2\vec{p_1}+\vec{p_2}\ \ 2\vec{p_2}\ \ 3\vec{p_3})$$

$$=(\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$ から $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ が Jordan 標準形.

(5) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda+1)^3$ となる. $(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

から $\mu_A(\lambda) = (\lambda+1)^3$ となる.

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\vec{p}_3 := (A+I_3)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ なので

$\vec{p}_2 := (A+I_3)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となる.

$\underline{A\vec{p}_1 = -\vec{p}_1 + \vec{p}_2}$, $\vec{p}_3 = (A+I_3)\vec{p}_2$ から $\underline{A\vec{p}_2 = -\vec{p}_2 + \vec{p}_3}$

$(A+I_3)\vec{p}_3 = (A+I_3)^3\vec{p}_1 = O_3\vec{p}_1 = \vec{0}$ から $\underline{A\vec{p}_3 = -\vec{p}_3}$

となる. $AP = (-\vec{p}_1 + \vec{p}_2\ \ -\vec{p}_2 + \vec{p}_3\ \ -\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ から

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ が A の Jordan 標準形.

(6) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda+1)^3$, $A + I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \\ -9 & 9 & -3 \end{pmatrix}$, $(A+I_3)^2 = O_3$ から

$\mu_A(\lambda) = (\lambda+1)^2$ である.

$V(3) \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff 3x - 3y + z = 0$ から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3x+3y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

から $V(-1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ である.

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\vec{p}_2 := (A+I_3)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \in V(-1)$ となる. さらに

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ が線形独立となるように $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\in V(-1)$ とする. (注 ここで $\vec{p}_2 \nparallel \vec{p}_3$ である $\vec{p}_3 \in V(-1)$ を選ぶ)

$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ とすると

$A + I_3$ をかけると $c_1 \vec{p}_2 = \vec{0}$ となるが

$\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ である. これから

$c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ が従うが $\vec{p}_2 \nparallel \vec{p}_3$

から $c_2 = c_3 = 0$ となる.

$A\vec{p}_1 = -\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $A\vec{p}_2 = -\vec{p}_2$, $A\vec{p}_3 = -\vec{p}_3$

から

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ が Jordan

標準形である.

(7) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$, $(A+2I_3)(A-I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \neq O_3$

から $\mu_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)^3$ である. $V(-2)$, $V(1)$, $W(1)$ の基底を求める.

$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-2) \iff y = z = 0$

従って $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-2)$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる $V(-2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$A - I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(1) \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(1)$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる $V(1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W(1) \iff 3x - y - 4z = 0$

従って $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W(1)$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x - 4z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

と表わされる. $W(1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

注

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\vec{p}_2 := (A - I_3)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \in V(1)$

となる. ($\vec{p}_1 \in W(1) = \mathrm{Ker}((A - I)^2)$ に注意しよう).

$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする. $W(1) \oplus V(-2)$ なので

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0} \text{ から } c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0},\ c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

となる. $\vec{p}_3 \neq \vec{0}$ から $\underline{c_3 = 0}$ である. $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$ の両辺に $(A - I_3)$ をかけると $c_1\vec{p}_2 = \vec{0}$ となる. $\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ から $\underline{c_1 = 0}$. さらに $c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$ で $\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ なので $\underline{c_2 = 0}$. よって $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則であることが分かる.

$A\vec{p}_1 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $A\vec{p}_2 = \vec{p}_2$, $A\vec{p}_3 = -2\vec{p}_3$ から

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ が A の Jordan 標準形である.

$A \neq 3I_3$ で

(8) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2$ で $(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 28 \\ 2 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}^2 = O_3$ から

$\mu_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2$ である. $V(3)$ の基底を求める.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(3) \iff 2x - y + 7z = 0$$

から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(3)$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 7z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

と表されるので $V(3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\vec{p_2} := (A - 3I_3)\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in V(3)$ となる.

$\vec{p_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると $\vec{p_3} \in V(3)$ で $\vec{p_3} \nparallel \vec{p_2}$ なので $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}$ が線形独立となる (各自示す). P は正則で

$A\vec{p_1} = 3\vec{p_1} + \vec{p_2}$, $A\vec{p_2} = 3\vec{p_2}$, $A\vec{p_3} = 3\vec{p_3}$ なので

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ が A の Jordan 標準形である.

(9) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$ で $(A+2I_3)(A-4I_3) = O_3$

から $\mu_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-4)$ となる Aは対角化可能である.

(そもそもAは対称行列であった!!)

$V(-2)$, $V(4)$ の基底を求める.

$$A+2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ から}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-2) \iff x+y-2z=0$ となる. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-2)$ は

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので

$$V(-2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A-4I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(4) \iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$ となるので

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(4)$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ となる.

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は線形独立となる. 実際.

$V(-2) \oplus V(4)$ なので $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ から

$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$, $c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ となる $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$, $\vec{p}_3 \neq \vec{0}$ から $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 0$ が従う. よって Pは正則で

$AP = P\begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$ から $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$ が Aの

Jordan 標準形である.