LA 2021 L01
04/07

記号

$\mathbb{R}$　実数全体の集合.　Real Numbers

$\mathbb{C}$　複素数全体の集合.　Complex Numbers

$\mathbb{K}$　$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$　(der Körper 体)

ベクトル

列ベクトルを主に使う.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4, \mathbb{K}^4$$

ほとんどの場合は $\mathbb{R}$ で十分.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \\ x_4 - y_4 \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{pmatrix}$$ 定数倍, スカラー倍.

加法とスカラー倍の性質は教科書 4ページにあります. (定理1.1)

No. (　　)

標準単位ベクトル（$\mathbb{R}^4$ 中の場合は）

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

演習1.2. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 　第2成分，第3成分は？

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 .$$

と表現できる．

演習1.5 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して

（定理1.1（2））

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \qquad (1.8)$$
$$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \qquad (1.9)$$
$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \qquad (1.10)$$

$\vec{a} = (a_i)$ と表す．(1.8) について

$$(\text{左辺}) = \lambda(\mu a_i) = (\lambda(\mu a_i))$$
$$(\text{右辺}) = (\lambda\mu)(a_i) = ((\lambda\mu) a_i)$$

から各々の成分について $\lambda(\mu a_i) = (\lambda\mu) a_i$.

よって $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

(1.9), (1.10) は各自示す．（表現法の定義である）

演習1.6, 1.8は各自勉強しておくこと.

行ベクトル $\mathbb{a} = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4) \in (\mathbb{R}^4)^*$

4次元実行ベクトルの全体.

$\mathbb{b} = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4) \in (\mathbb{R}^4)^*,\ \lambda \in \mathbb{R}$

に対して

$$\mathbb{a} \pm \mathbb{b} = (a_1 \pm b_1\ \ a_2 \pm b_2\ \ a_3 \pm b_3\ \ a_4 \pm b_4)$$

$$\lambda\,\mathbb{a} = (\lambda a_1\ \ \lambda a_2\ \ \lambda a_3\ \ \lambda a_4)$$

注

$$\mathbb{a}\vec{x} = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$$

は今後よく用いる.

演習1.10 $\mathbb{a} \in (\mathbb{R}^4)^*$ に対して

$$\mathbb{a}\vec{x} = \vec{0} \quad (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4)$$

ならば

$$\mathbb{a} = \mathbb{O} = (0\ 0\ 0\ 0)$$

No. (　　)

ベクトルの転置 (transposition)

$\mathbf{a} = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ に対して $\quad {}^t\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ に対して $\quad {}^t\vec{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$

定理1.3 は 必要になったら示します.

演習 1.11 $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して ${}^t\vec{a}\,\vec{w} = ?$

演習1.12 もいつか 必要となります. (行列の転置のとき)

ベクトルの内積 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ に対し

$$(\vec{x}, \vec{y}) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$
$$= (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$
$$= {}^t\vec{x}\ \vec{y}$$

公式 $(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\vec{x} \cdot \vec{y}$ $(\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n)$

大きさ（ノルム）

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (\vec{x}, \vec{x})$$
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

大きさとノルムに関する定理 1.4.

注 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geqq 0$ のとき.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$$

帰納法で示す. (演習 1.14)

定理 1.5. $\|\vec{x} \pm \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$

+ を示す.
$$\begin{aligned}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \\ &= (\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \\ &= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2\end{aligned}$$

応用 演習 1.16 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$f(t) = \|\vec{b} - t\vec{a}\|^2$ の最小値.

$\|\vec{a}\|^2 = 11$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -2$, $\|\vec{b}\|^2 = 6$

$$\begin{aligned}f(t) &= \|\vec{b}\|^2 - 2(\vec{b}, t\vec{a}) + \|t\vec{a}\|^2 \\ &= \|\vec{b}\|^2 - 2t(\vec{b}, \vec{a}) + t^2\|\vec{a}\|^2 \\ &= 6 + 4t^2 + 11t^2 \\ &= 11\left(t + \frac{2}{11}\right)^2 + 6 - \frac{4}{11}\end{aligned}$$

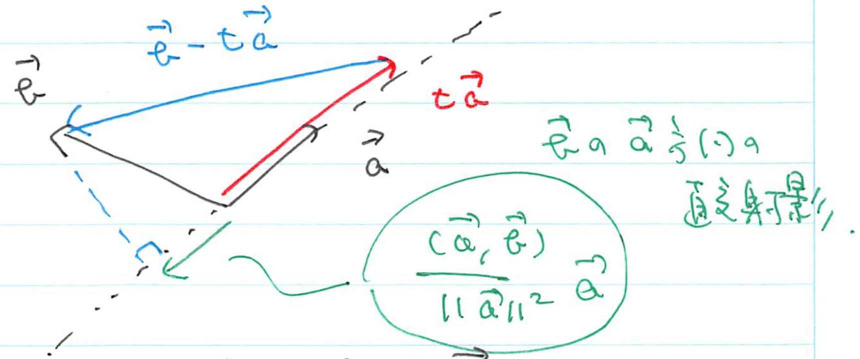
$t = -\frac{2}{11}$ のとき f の最小値 $6 - \frac{4}{11} = \frac{62}{11}$

ベクトルの垂直.　$\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$(\vec{a},\vec{b})=0 \overset{\text{定義}}{\iff} \vec{a}\perp\vec{b}$$

注　$\vec{0}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\perp\vec{0}$.　(高校ではゼロベクトルに対して垂直は考えなかった)

$\vec{a}\neq\vec{0}$ とする.



$\|\vec{b}-t\vec{a}\|^2$ が最小 $\iff$ $\vec{b}-t\vec{a}\perp\vec{a}$

$$\|\vec{b}-t\vec{a}\|^2 = t\|a\|^2-2t(\vec{a},\vec{b})+\|\vec{b}\|^2$$

↑
計算

$$=\|\vec{a}\|^2\left(t-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\right)^2+\|\vec{b}\|^2-\frac{(\vec{a},\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2}$$

から　$t=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}$ のとき最小値　$\|\vec{b}\|^2-\dfrac{(\vec{a},\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2}$

$0=(\vec{b}-t\vec{a},\vec{a})=(\vec{b},\vec{a})-t\|\vec{a}\|^2$　から　$t=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}$

$$\Updownarrow$$

$\vec{b}-t\vec{a}\perp\vec{a}$.