クラメールの公式・ベクトルの平行

LA2021 L02, Part 02

Nobuyuki TOSE

April 14, 2021

Part 02 a
クラメールの公式

クラメールの公式

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & \cdots(1) \\ cx + dy = \beta & \cdots(2) \end{cases}$$

を考える． y を消去するために $(1) \times d - (2) \times b$ を考える．

$$\begin{array}{rccccc} & adx & + & bdy & = & \alpha d \\ -) & bcx & + & bdy & = & \beta b \\ \hline & (ad-bc)x & & & = & \alpha d - \beta b \end{array}$$

x を消去するために $(1) \times c - (2) \times a$ を考える．

$$\begin{array}{rccccc} & acx & + & bcy & = & \alpha c \\ -) & acx & + & ady & = & \beta a \\ \hline & & & (bc-ad)y & = & \alpha c - \beta a \end{array}$$

行列式・クラメールの公式

行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

これを用いると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

特に $D := \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

これを**クラメールの公式**と言います.

クラメールの公式–例

$$\begin{cases} 2x & + & 4y & = & 6 \\ 4x & + & 4y & = & 8 \end{cases}$$

を解きます.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -8 \neq 0$$

からクラメールの公式が適用できます．実際

$$x = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(6 \cdot 4 - 8 \cdot 4) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

$$y = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

Part 02 b
斉次方程式の解

クラメールの公式から分かること

斉次方程式

$$\begin{cases} ax + by = 0 & \cdots (1) \\ cx + dy = 0 & \cdots (2) \end{cases} \qquad (\#)$$

を条件

$$D := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

の下で考えます．クラメールの公式を適用できて

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0, \quad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$D \neq 0 \Rightarrow \Big((\#) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Big) \qquad (3)$$

(3) の逆は？

(3) の逆の対偶は？

$$D = ad - bc = 0 \Rightarrow \left(\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\ (\#)\right) \tag{4}$$

証明に入る前に注意：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \text{ は } (\#) \text{ を満たす.}$$

(i) $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき OK
(ii) $c \neq 0$ または $d \neq 0$ のとき OK
(iii) $NOT((i) \vee (ii)) \equiv NOT(i) \wedge NOT(ii) \equiv a = b = c = d = 0$ のとき明らか.

まとめ

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \binom{x}{y} = \vec{0} \right)$$

および

$$D = 0 \Leftrightarrow \exists \binom{x}{y} \neq \vec{0} \begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

次のステップへ準備

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$$

に対して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 \\ \vdots \\ xa_i + yb_i \\ \vdots \\ xa_n + yb_n \end{pmatrix}$$

次のステップへ準備 (2a)

特に $n=2$ のとき

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$$

に対して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{\gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & \gamma_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & \gamma_2 \end{cases}$$

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & = & 0 \end{cases}$$

次のステップへ準備 (2b)

行列式を

$$|\vec{a}\ \vec{b}| := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

と定義すると「まとめ」は

$$|\vec{a}\ \vec{b}| \neq 0 \Leftrightarrow \left(x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \right)$$

$$|\vec{a}\ \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow \exists \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \left(x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \right)$$

次のステップへ準備 (3)

特に $n=3$ のとき

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\quad \vec{\gamma}=\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}\in \mathbf{K}^3$$

に対して

$$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{\gamma}\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} a_1x & + & b_1y & = & \gamma_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & \gamma_2 \\ a_3x & + & b_3y & = & \gamma_3 \end{array}\right.$$

$$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} a_1x & + & b_1y & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & = & 0 \\ a_3x & + & b_3y & = & 0 \end{array}\right.$$

Part 02c
ベクトルの平行・非平行

定義–ベクトルの平行

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$$

に対して

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Leftrightarrow \left(x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \right)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \left(x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \right)$$

と定義します.

定義–ベクトルの平行–2 次元の場合の言い換え

$$\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right), \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$$

に対して

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Leftrightarrow \left(x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}\right) \Leftrightarrow |\vec{a}\ \vec{b}| \neq 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \left(x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow |\vec{a}\ \vec{b}| = 0$$

$n=3$ の場合は

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\in \mathbf{K}^3 \text{に対して } x\vec{a}+y\vec{b}=\begin{pmatrix}xa_1+yb_1\\xa_2+yb_2\\xa_3+yb_3\end{pmatrix}=\vec{0}$$

を仮定します． $\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\neq 0$ ならば

$$\begin{cases}a_2x + b_2y = 0\\ a_3x + b_3y = 0\end{cases} \quad \text{から} \quad x=y=0$$

となります． 以上で

$$\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \vec{a}\nparallel\vec{b}$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0 \vee \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\neq 0 \vee \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \vec{a}\nparallel\vec{b}$$

$n = 3$ の場合：逆は？

前ページの結論の逆（その対偶）は

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$a_1 \neq 0$ の場合は

$$-\frac{b_1}{a_1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 + b_1 \\ \frac{-b_1 a_2 + b_2 a_1}{a_1} \\ \frac{-b_1 a_3 + b_3 a_1}{a_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $\vec{a} \parallel \vec{b}$ であることが分かります.
$a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ の場合も同様です（各自示しましょう）.
注意 実はここで何かを言わないと証明が不十分となります.

まとめ

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 0r \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Part 02d

ベクトルの平行・非平行（続）—教科書15P 定理1.6

2本の平行でないベクトル–定理1.6

$\vec{x}, \vec{y}$ が平行でないとします：

$$\vec{x} \nparallel \vec{y}$$

この2本のベクトルが張る2本のベクトル

$$\vec{\alpha} = a_1\vec{x} + b_1\vec{y}, \quad \vec{\beta} = a_2\vec{x} + b_2\vec{y}$$

に対して

定理 1.6 (教科書 15P)

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

定理 1.6 の証明

$$\begin{aligned}\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} &= \lambda(a_1\vec{x}+b_1\vec{y})+\mu(a_2\vec{x}+b_2\vec{y}) \\ &= (\lambda a_1+\mu a_2)\vec{x}+(\lambda b_1+\mu b_2)\vec{y}\end{aligned}$$

から

$$\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0} \iff (*)\left\{\begin{array}{rcl}\lambda a_1+\mu a_2 &=& 0 \\ \lambda b_1+\mu b_2 &=& 0\end{array}\right.$$

ここで $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ならば $(*) \Rightarrow \lambda=\mu=0$

他方 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ ならば $(*)$ を満たす $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ が存在します.