クラメールの公式・ベクトルの平行

LA2021 L02, Part 02

Nobuyuki TOSE

April 14, 2021

Part 02 a
クラメールの公式

クラメールの公式

連立１次方程式

$$\begin{cases} ax & + & by & = & \alpha & \cdots (1) \\ cx & + & dy & = & \beta & \cdots (2) \end{cases}$$

を考える．y を消去するために $(1) \times d - (2) \times b$ を考える．

$$\begin{array}{rccccc} & adx & + & bdy & = & \alpha d \\ -) & bcx & + & bdy & = & \beta b \\ \hline & (ad-bc)x & & & = & \alpha d - \beta b \end{array}$$

x を消去するために $(1) \times c - (2) \times a$ を考える．

$$\begin{array}{rccccc} & acx & + & bcy & = & \alpha c \\ -) & acx & + & ady & = & \beta a \\ \hline & & & (bc-ad)y & = & \alpha c - \beta a \end{array}$$

行列式・クラメールの公式

行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

これを用いると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

特に $D := \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

これを**クラメールの公式**と言います.

クラメールの公式–例

$$\begin{cases} 2x & + & 4y & = & 6 \\ 4x & + & 4y & = & 8 \end{cases}$$

を解きます.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -8 \neq 0$$

からクラメールの公式が適用できます．実際

$$x = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(6 \cdot 4 - 8 \cdot 4) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

$$y = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$