2次元部分空間・2平面の交わり・ベクトル積

LA2021 SL03

Nobuyuki TOSE

April 21, 2021

Plan

Part 01
2次元部分空間

2 次元部分空間

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ が平行でないとします：$\vec{a} \nparallel \vec{b}$
このとき

$$V := \{x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbf{K}^n;\ x, y \in \mathbf{K}\}$$

を $\vec{a}, \vec{b}$ が生成する 2 次元部分空間と呼びます.

$\vec{v} \in V$ は $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ と表されますが, x, y は一意的です.

実際

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$$

とすると

$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0}$$

から $x = x'$, $y = y'$ が従います.

2 次元部分空間 (2)

$$\vec{\alpha} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad \vec{\beta} = z\vec{a} + w\vec{b}$$

とするとき

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{aligned} c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} &= c_1(x\vec{a} + y\vec{b}) + c_2(z\vec{a} + w\vec{b}) \\ &= (xc_1 + zc_2)\vec{a} + (yc_1 + wc_2)\vec{b} = \vec{0} \end{aligned}$$

とします. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\begin{cases} xc_1 + zc_2 &= 0 \\ yc_1 + wc_2 &= 0 \end{cases} \tag{\#}$$

が従います.

$\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ ならば (#) から $c_1 = c_2 = 0$ が導けますから

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$$

が従います.
他方

$$\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| = 0$$

ならば (#) を満たす $c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ で $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ を満たすものが存在して

$$c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} = \vec{0}$$

が成立します．これは

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

を意味します.

Part 02
2平面の交わりとベクトル積

2 枚の平面が定める直線

座標空間の点 (x, y, z) が方程式

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x & - & y & + & z & = & 1 & \cdots(1) \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 & \cdots(2) \end{array}\right.$$

を満たすとき x, y を z で表しましょう．

$$\left\{\begin{array}{cccccl} x & - & y & = & 1-z & (1)' \\ 2x & + & y & = & z-1 & (2)' \end{array}\right.$$

と x と y の連立 1 次方程式とみなします． $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ であるので，これをクラメールの公式で解きます．

2 枚の平面が定める直線 (2)

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ -1+z & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\{(1-z)\cdot 1 - (-1+z)(-1)\} = \frac{1}{3}\cdot 0 = 0 \\
y &= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -1+z \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\{1\cdot(-1+z) - 2\cdot(1-z)\} = \frac{1}{3}(3z-3) = z-1
\end{aligned}
$$

2 枚の平面が定める直線 (3)

ベクトル表示をすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z-1 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので $(0,-1,0)$ を通り $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が方向ベクトルである直線であることが分かる．これは (1) が定める平面と (2) が定める平面の交わりがなす直線であることが分かる．

平面の方程式

点 $(0,-1,0)$ は

$$x - y + z = 1 \quad \cdots (1)$$

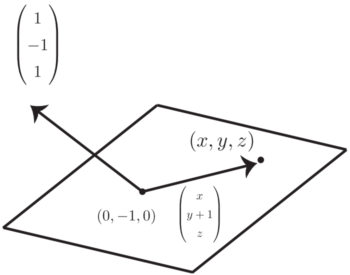
を満たす．これから

$$\begin{array}{rcccccccl} & x & - & y & + & z & = & 1 & \cdots(1) \\ -) & 0 & - & (-1) & + & 0 & = & 1 & \\ \hline & x & - & (y+1) & + & z & = & 0 & \cdots(1)' \end{array}$$

となります．(1)' は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0$$

平面の方程式 (2)

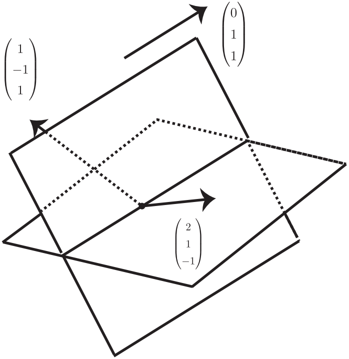


(1) は法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で $(0, -1, 0)$ を通る平面であることが分かります.

2 平面の交わり

ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は平面 (1) と平行であり，平面 (2) とも平行である．これから

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



2 平面の交わり (2)

2 平面の交わり

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & (2) \end{cases}$$

を考えます．(1) と (2) の法線ベクトルについて

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が成立するとします．さらに

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定します．

2 平面の交わり (3)

クラメールの公式を用いて

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1 z + \alpha_1 & b_1 \\ -c_2 z + \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 z + \alpha_1 \\ a_2 & -c_2 z + \alpha_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

が従います．さらに $t = \frac{z}{D}$ とパラメータを定めると，上の結果をベクトルで表すことによって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と 2 直線の交わりは直線としてパラメータ表示される．

2 平面の交わり (4)—ベクトル積

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

を $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ の外積（ベクトル積）と呼びます．このとき

$$\vec{p}_1 \perp \vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \quad \vec{p}_2 \perp \vec{p}_1 \times \vec{p}_2$$

以上で幾何学的にこれは示しましたが，代数的にも示せます．

ベクトル積の性質

復習

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

これから

$$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0}$$

$$\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0}$$

以上は代数的に示していて $\mathbf{C}^3$ 中でも大丈夫です．後にベクトル積の幾何学的な意味を考えるときに，$\mathbf{R}^3$ の場合に幾何的な証明を与えます．