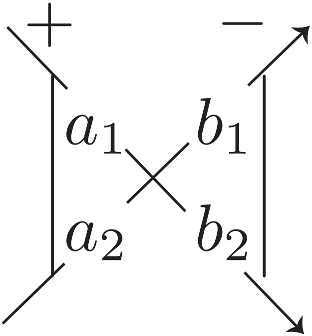
Part 03
2次行列式

定義

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$



列の基本性質

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

に対して

I（2 重線型性–各列に関して線型）

$$|\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad \vec{c}| = \lambda \cdot |\vec{a} \quad \vec{c}| + \mu \cdot |\vec{b} \quad \vec{c}|$$

$$|\vec{a} \quad \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}| = \lambda \cdot |\vec{a} \quad \vec{b}| + \mu \cdot |\vec{a} \quad \vec{c}|$$

II（交代性）

$$|\vec{a} \quad \vec{b}| = -|\vec{b} \quad \vec{a}|$$

III（正規性）

$$|I_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

基本性質 (I) の証明について

補題 写像

$$F:\ \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto px_1 + qx_2$$

は

$$F(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda \cdot F(\vec{a}) + \mu \cdot F(\vec{b})$$

を満たす.

基本性質から導かれる性質

II' $|\vec{a} \quad \vec{a}| = 0$

(II) から $|\vec{a} \quad \vec{a}| = -|\vec{a} \quad \vec{a}|$

IV $|\vec{a} \quad \vec{b}| = |\vec{a} \quad \lambda\vec{a} + \vec{b}|, \quad |\vec{a} \quad \vec{b}| = |\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad \vec{b}|$

$$|\vec{a} \quad \lambda\vec{a} + \vec{b}| = \lambda \cdot |\vec{a} \quad \vec{a}| + |\vec{a} \quad \vec{b}| = \lambda \cdot 0 + |\vec{a} \quad \vec{b}| = |\vec{a} \quad \vec{b}|$$

ベクトルと行列の転置 (1)

ベクトルの転置

$$ {}^t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (a_1 \ \ a_2), \quad {}^t(a_1 \ \ a_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} $$

(転置の線型性)$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^2$ に対して

$$ {}^t\left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\right) = \lambda \cdot {}^t\vec{a} + \mu \cdot {}^t\vec{b} $$

行ベクトル $\mathbf{a} = (a_1 \ \ a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1 \ \ b_2) \in \left(\mathbf{K}^2\right)^*$ に対しても

$$ {}^t(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda \cdot {}^t\mathbf{a} + \mu \cdot {}^t\mathbf{b} $$

ベクトルと行列の転置 (2)

行列の転置 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$${}^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{a}_1\ {}^t\mathbf{a}_2)$$

転置行列の行列式

2 次正方行列 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$\left|{}^t A\right| = |A|\,, \quad \begin{vmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \end{vmatrix} = \left|\vec{a}_1\ \vec{a}_2\right|\,, \quad \left|{}^t\mathbf{a}_1\ {}^t\mathbf{a}_2\right| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}$$

成分では

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

行の基本性質 (1)

I (2 重線型性—行に関して線型)

$$\begin{vmatrix} \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

$$G: \ (\mathbf{K}^2)^* \to \mathbf{K} \quad (x\ \ y) \mapsto px+qy$$

が

$$G(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \lambda G(\mathbf{a}) + \mu G(\mathbf{b})$$

を満たすことから示されます．または

$$\begin{vmatrix} \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \left|{}^t(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) \ \ {}^t\mathbf{c}\right| = \left|\lambda{}^t\mathbf{a}+\mu{}^t\mathbf{b} \ \ {}^t\mathbf{c}\right| = \lambda\cdot\left|{}^t\mathbf{a} \ \ {}^t\mathbf{c}\right| + \mu\cdot\left|{}^t\mathbf{b} \ \ {}^t\mathbf{c}\right| = RHS$$

行の基本性質 (2)

II（交代性） $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix}$

直接示すのが簡単ですが，将来一般的な場合を考えることを考慮して

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{a} & {}^t\mathbf{b} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} {}^t\mathbf{b} & {}^t\mathbf{a} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix}$$

行の性質 (1)

II' $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} = 0$

基本性質 **II**（交代性）を用いて

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix}$$

から分かります.

行の性質 (2)

IV $$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}\\ \lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}\end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}\\ \mathbf{b}\end{vmatrix}$$

基本性質 **I** と **II**（交代性）を用いて

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\ \lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{a}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{vmatrix} = \lambda\cdot 0 + \begin{vmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{vmatrix}$$

行列の積の行列式 (1)

V $X, Y \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$|XY| = |X| \cdot |Y|$$

$$X = (\vec{a}\ \vec{b}), \quad Y = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$XY = (p_1\vec{a} + p_2\vec{b}\ \ q_1\vec{a} + q_2\vec{b})$$

行列の積の行列式 (2)

$$
\begin{aligned}
|XY| &= \left| p_1\vec{a} + p_2\vec{b} \ \ q_1\vec{a} + q_2\vec{b} \right| \\
&= p_1 \left| \vec{a} \ \ q_1\vec{a} + q_2\vec{b} \right| + p_2 \left| \vec{b} \ \ q_1\vec{a} + q_2\vec{b} \right| \\
&= p_1 \left| \vec{a} \ \ q_2\vec{b} \right| + p_2 \left| \vec{b} \ \ q_1\vec{a} \right| \\
&= p_1 q_2 \left| \vec{a} \ \ \vec{b} \right| + p_2 q_1 \left| \vec{b} \ \ \vec{a} \right| \\
&= p_1 q_2 \left| \vec{a} \ \ \vec{b} \right| - p_2 q_1 \left| \vec{a} \ \ \vec{b} \right| \\
&= (p_1 q_2 - p_2 q_1) \left| \vec{a} \ \ \vec{b} \right| = |Y| \cdot |X|
\end{aligned}
$$

行列の積の行列式 (3)—応用

定理 $A \in M_2(\mathbf{K})$ が正則ならば

$$|A| \neq 0$$