SL04 補足演習問題

I 次の行列の逆行列を求めましょう.

(1) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(5)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(6)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **(7)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

解答

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ から

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

となります.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(7) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

II $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします. 以下を計算しましょう。

(1) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(2)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, **(3)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(4)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(5)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(6) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(7)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, **(8)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(9)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(10) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(11)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(12)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

解答

(1)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{a}$$

(2)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{b}$$

(3)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{a}$$

(4)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{b}$$

(5)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{c}$$

(6)

$$(\vec{a}\,\vec{b})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} & 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

(7)

$$(\vec{a}\,\vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} & 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}\ \vec{a} \end{pmatrix}$$

(8)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

(9)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a})$$

(10)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

(11)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{c})$$

(12)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \lambda\vec{c})$$

> **IV** 以下の等式を満たす 2 次正方行列 X を求めましょう．
> **(i)** $\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}$　**(ii)** $X\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$

解答 (i) $\begin{vmatrix}1&2\\-2&1\end{vmatrix}=1+4=5\neq 0$ から $\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$ が正則であることが分かる．両辺に $\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}$ を左から掛けて

$$\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}$$

を得るが，

$$(\text{左辺})=I_2X=X$$

となるので

$$X=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7&-8\\11&14\end{pmatrix}$$

となる．

(ii) $\begin{vmatrix}3&4\\5&6\end{vmatrix}=18-20=-2\neq 0$ から $\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}$ が正則であることが分かる．両辺に $\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}^{-1}$ を右から掛けて

$$X\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}^{-1}$$

を得るが，

$$(\text{左辺})=XI_2=X$$

となるので

$$X=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}6&-4\\-5&3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&2\\-17&11\end{pmatrix}$$

となります．

> **IV** 2 次正方行列 A, B が正則であるとします．このとき AB と A^{-1} が正則であることを示しましょう．

解答

$$AB\cdot B^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AI_2A^{-1}=AA^{-1}=I_2$$

$$B^{-1}A^{-1}\cdot AB=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}I_2B=B^{-1}B=I_2$$

から AB は正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

であることが分かります.

　他方

$$A^{-1}A = I_2, \quad AA^{-1} = I_2$$

から A^{-1} は正則で

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

であることが分かります.

V (1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ に対して A^2 を求めましょう.

(2) (1) を用いて A^{-1} を求めましょう.

解答 (1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos\theta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

(2) 正則行列の定義から $A^{-1} = A$ として A が正則であることが分かります.

VI $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします。$\vec{w}$ を $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ の $\vec{a}$ 方向の直交射影とします。このとき

$$\vec{q} = \vec{v} + 2(\vec{w} - \vec{v}) = 2\vec{w} - \vec{v}$$

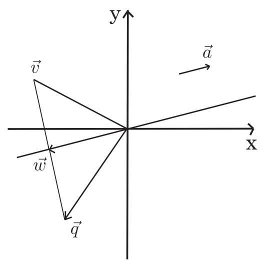
に対して

$$\vec{q} = Q\vec{v}$$

を満たす行列 Q を求めましょう。さらに

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

のとき Q を求めましょう。



解答

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{v})}{||\vec{a}||^2} = \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha^2 + \beta^2}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}\begin{pmatrix} \alpha^2 x + \alpha\beta y \\ \alpha\beta x + \beta^2 y \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{q} = 2\vec{w} - \vec{v} = \left(\frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} - I_2 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & -\alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となりますから

$$Q = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & -\alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

となります．特に $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ のとき

$$Q = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

となります．