LA2021SL05 演習問題解答

I $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が条件 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を満たすとします.

(1) $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$ が $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ を満たすことを示しましょう.

(2) $x\vec{a} + y\vec{b} = s\vec{p} + t\vec{q}$ が成立するとき s, t を x, y で表しましょう.

解答 (1) $c_1\vec{p} + c_2\vec{q} = \vec{0}$ とします．このとき

$$\begin{aligned} c_1\vec{p} + c_2\vec{q} &= c_1(3\vec{a} + \vec{b}) + c_2(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= (3c_1 + c_2)\vec{a} + (c_1 + c_2)\vec{b} \end{aligned}$$

から

$$(3c_1 + c_2)\vec{a} + (c_1 + c_2)\vec{b} = \vec{0}$$

であることが分かります．さらに $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ c_1 & + & c_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

であることが従います．このとき $\left|\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 2 \neq 0$ であることに注意すると $c_1 = c_2 = 0$，従って $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ であることが分かります.

(2)

$$\begin{aligned} s\vec{p} + t\vec{q} &= s(3\vec{a} + \vec{b}) + t(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= (3s + t)\vec{a} + (s + t)\vec{b} \end{aligned}$$

であることから

$$x\vec{a} + y\vec{b} = (3s + t)\vec{a} + (s + t)\vec{b}$$

となります．さらに $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3s & + & t & = & x \\ s & + & t & = & y \end{array} \right.$$

であることが従います．これをクラメールの公式を用いて s, t について解くと $\left|\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 2 \neq 0$ から

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left|\begin{smallmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2}(x - y) \\ y &= \frac{1}{2}\left|\begin{smallmatrix} 3 & x \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{2}(3y - x) = \frac{1}{2}(3y - x) \end{aligned}$$

であることが分かります.

II 次の $\vec{a},\vec{b},\vec{\alpha},\vec{\beta} \in \mathbf{R}^n$ に対して以下の (i),(ii),(iii),(iv) を示しましょう.
(i)$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ を示しましょう.
(ii)
$$L = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$
を考えます.
$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in L$$
を示しましょう.
(iii) $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ を示しましょう.
(iv) L の基底 $\vec{a},\vec{b}$ に関する座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 基底 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ に関する座標 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ とするとき $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ で表しましょう.
(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$
(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

解答 (1)(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ から $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ が従います.
(ii)
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -6 & 5 \\ -1 & 4 & 10 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
から
$$\vec{\alpha} = -2\vec{a} + 2\vec{b} \in L, \quad \vec{\beta} = 3\vec{a} + \vec{b} \in L$$
が分かります.
(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ において $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ から $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

が従います.

(2)(i) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0$ から $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ が従います.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 8\\ -1 & -2 & -2 & -5\\ 1 & 1 & 3 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha}=4\vec{a}-\vec{b}\in L,\quad \vec{\beta}=\vec{a}+2\vec{b}\in L$$

が分かります.

(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ において $\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=9\neq 0$ から $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

が従います.

(3)(i) $\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=11\neq 0$ から $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ が従います.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc}4 & 1 & 6 & -1\\ 1 & 3 & 7 & 8\\ -1 & 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0 & -5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 7 & 8\\ 4 & 1 & 6 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0 & -5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 7 & 8\\ 0 & -11 & -22 & -33\\ 0 & 4 & 8 & 12\\ 0 & -7 & -14 & -21\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 7 & 8\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 8 & 12\\ 0 & -7 & -14 & -21\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha} = \vec{a} + 2\vec{b} \in L, \quad \vec{\beta} = -\vec{a} + 3\vec{b} \in L$$

が分かります.

(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ において $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ から $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

が従います.

III

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が張る部分空間

$$L = L(\vec{a}, \vec{b}) = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます.

$$\vec{c}, \vec{d} \in L, \lambda, \mu \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda\vec{c} + \mu\vec{d} \in L$$

を示しましょう.

解答 $\vec{c}, \vec{d} \in L$ であるので

$$\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}, \quad \vec{d} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

と表されます．このとき

$$\begin{aligned} \vec{c} + \vec{d} &= x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + x_2\vec{a} + y_2\vec{b} \\ &= (x_1 + x_2)\vec{a} + (y_1 + y_2)\vec{b} \in L \\ \lambda\vec{c} &= \lambda(x_1\vec{a} + y_1\vec{b}) = (\lambda x_1)\vec{a} + (\lambda y_1)\vec{b} \in L \end{aligned}$$

となります．これから

$$\lambda\vec{c} + \mu\vec{d} \in L$$

が従います.

IV

(1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$${}^t(\vec{a} + \vec{b}) = {}^t\vec{a} + {}^t\vec{b}, \quad {}^t(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot {}^t\vec{a}$$

を示しましょう.

(2) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbf{R}^n)^*$ に対して

$${}^t(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = {}^t\mathbf{a} + {}^t\mathbf{b}, \quad {}^t(\lambda\mathbf{a}) = \lambda \cdot {}^t\mathbf{b}$$

を示しましょう.

解答

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} {}^t(\vec{a}+\vec{b}) &= {}^t\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_i+b_i \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = (a_1+b_1\ \dots\ a_i+b_i\ \dots\ a_n+b_n) \\ &= (a_1\ \dots\ a_i\ \dots\ a_n) + (b_1\ \dots\ b_i\ \dots\ b_n) = {}^t\vec{a} + {}^t\vec{b} \\ {}^t(\lambda\vec{a}) &= {}^t\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = (\lambda a_1\ \dots\ \lambda a_i\ \dots\ \lambda a_n) \\ &= \lambda(a_1\ \dots\ a_i\ \dots\ a_n) = \lambda {}^t\vec{a} \end{aligned}$$

(2)

$$\mathbf{a} = (a_1\ \dots\ a_j\ \dots\ a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1\ \dots\ b_j\ \dots\ b_n)$$

とすると

$$\begin{aligned} {}^t(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= {}^t(a_1+b_1\ \dots\ a_j+b_j\ \dots\ a_n+b_n) \\ &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_j+b_j \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = {}^t\mathbf{a} + {}^t\mathbf{b} \\ {}^t(\lambda\mathbf{a}) &= {}^t(\lambda a_1\ \dots\ \lambda a_j\ \dots\ \lambda a_n) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot {}^t\mathbf{a} \end{aligned}$$