2次形式の正定値性（補足）

対称な $A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ に対してその2次形式

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ax^2+2cxy+by^2$$

について考える。この2次形式の正定値性について次の定理を示した。

定理

(1) $\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$

$\Updownarrow$

(2) A の固有値 $\alpha, \beta > 0$

$\Updownarrow$

(3) $a > 0$ かつ $|A| > 0$

(1) と (3) が同値であることを直接示そう。

(1) $\Rightarrow$ (3)　$x=1,\ y=0$ とすると

$$0 < \left(A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = a$$

から $a>0$ が分かる.

$$(\#)\quad \left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = ax^2+2cxy+ey^2 = a\left(x+\frac{c}{a}y\right)^2+\left(e-\frac{c^2}{a}\right)y^2$$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\1\end{pmatrix}$ とすると

$$0 < \left(A\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\1\end{pmatrix}\right) = e-\frac{c^2}{a} = \frac{ae-c^2}{a}$$

から $\dfrac{ae-c^2}{a} > 0$ となる. $a>0$ から $\det(A) = ae-c^2 > 0$

(3) (#) を使う. $\dfrac{ae-c^2}{a} > 0$ となるので

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = a\left(x+\frac{c}{a}y\right)^2+\left(e-\frac{c^2}{a}\right)y^2 \geqq 0$$

が分かる. 等号成立は $a\left(x+\dfrac{c}{a}y\right)^2 = \dfrac{ae-c^2}{a}y^2 = 0$ 従って $x=y=0$ と必要十分である. よって $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow \left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) > 0$