

$$\text{VI } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ を対角化しましょう.}$$

解答

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8) \end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = 2$  (重根),  $8$  であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i)  $\lambda = 2$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y - 2z = 0$$

であることが分かりますから, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります.

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は平行でないですから,  $V(2)$  は 2 次元で,  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  が基底となります.

(ii)  $\lambda = 10$  のとき

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}z, \quad y = \frac{1}{2}z \end{aligned}$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります.  $\|\vec{p}_3\| = 1$  となるように

$$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めます.

ここで

$$P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

と定めると  $P$  は正則行列となります. このことを示すために

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

とします.  $V(2) \oplus V(8)$  が一般論から分かりますから

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}, \quad c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

が従います.  $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$  が成立しますから

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

であることが分かります. よって  $p$  が正則であることが分かります. このとき

$$Ap = (A\vec{P}_1 \ A\vec{P}_2 \ A\vec{P}_3) = (2\vec{P}_1 \ 2\vec{P}_2 \ 8\vec{P}_3) = (\vec{P}_1 \ \vec{P}_2 \ \vec{P}_3) \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

から

$$p^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

と対角化されます.

**VII**  $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$  に対して以下を示しましょう。

(1)  $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$

(2)  $V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) = \mathbf{K}^3$

(3) 各固有空間  $V(\alpha)$  に対して  $\mathbf{K}^3$  から  $V(\alpha)$  への射影を  $A$  で表しましょう。

**解答 (1)**

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 3 & 7 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

と計算されます.

(2)

$$V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) \subset \mathbf{K}^3$$

から

$$\dim(V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)) \leq \dim \mathbf{K}^3 = 3$$

が分かります. さらに

$$\dim V(-1), \dim V(1), \dim V(2) \geq 1$$

から

$$\dim(V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)) = \dim V(-1) + \dim V(1) + \dim V(2) \geq 3$$

が成立しますから

$$\dim(V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)) = \dim \mathbf{K}^3 = 3$$

であることが分かります. このとき

$$V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) = \mathbf{K}^3$$

であることが分かります.

(3)  $V(-1)$  への射影を  $P_1$ ,  $V(1)$  への射影を  $P_2$ ,  $V(2)$  への射影を  $P_3$  とすると

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{(-1-1)(-1-2)}(A-I)(A-2I) = \frac{1}{6}(A-I)(A-2I) \\ P_2 &= \frac{1}{(1-(-1))(1-2)}(A+I)(A-2I) = -\frac{1}{2}(A+I)(A-2I) \\ P_3 &= \frac{1}{(2-1)(2-(-1))}(A-I)(A+I) = \frac{1}{6}(A-I)(A+I) \end{aligned}$$

となります.

VIII  $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  を対角化しましょう.

解答 まず固有方程式を求めます.

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 & 2 \\ -4 & \lambda-4 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda & 0 \\ -4 & \lambda-4 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-4 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-8 & 2 \\ 0 & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-9) \end{aligned}$$

から固有値は  $\lambda = 0$  (重根), 9 であることが分かります. 次に固有ベクトルを求めます.

$\lambda = 0$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + 2y - z = 0$$

であるので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0 \text{ OR } y \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります。

$\lambda = 9$  のとき

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

が固有ベクトルであることが分かります。

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in V(0), \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in V(0), \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(9)$$

とすると  $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$  は正則となります。実際

$$c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 + c_3 \vec{p}_3 = \vec{0}$$

とすると  $V(0) \oplus V(9)$  と直和であることから

$$c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 = \vec{0}, \quad c_3 \vec{p}_3 = \vec{0}$$

が分かります。  $\vec{p}_1 \not\parallel \vec{p}_2, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$  から

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

が従いますから、 $P$  は正則であることが分かります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (\vec{0} \ \vec{0} \ 9\vec{p}_3) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$$

と  $A$  は対角化されます。

**IX**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  とします。

(1)  $A$  の固有ベクトルを求めましょう。

(2)  $A$  のスペクトル分解を求めましょう。すなわち  $\mathbf{K}^3$  を  $A$  の固有空間の直和に表しましょう。

(3) (2) で求めたスペクトル分解において各固有空間への射影を  $A$  で表しましょう。

解答 (1)

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)\end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = 1$  (重根),  $4$  であることが分かります. 次に固有ベクトルを求めます.

(i)  $\lambda = 1$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります. これから

$$\dim V(1) = 2$$

が分かります.

(ii)  $\lambda = 4$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0) \tag{10}$$

であることが分かります. これから

$$\dim V(4) = 1$$

が分かります.

(2)

$$V(1) \oplus V(4) \subset \mathbf{R}^3$$

において  $\dim(V(1) \oplus V(4)) = \dim V(1) + \dim V(4) = 2 + 1 = 3$  が成立しますから

$$V(1) \oplus V(4) = \mathbf{R}^3$$

と  $\mathbf{R}^3$  が  $A$  によってスペクトル分解できることが分かります.

(3) 任意の  $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$  を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 \in V(1), \vec{v}_2 \in V(4)$$

とスペクトル分解します.

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda - 4}{1 - 4} = -\frac{1}{3}(\lambda - 2)$$

とすると

$$f_1(A)\vec{v} = f_1(A)\vec{v}_1 + f_1(A)\vec{v}_2 = f_1(1)\vec{v}_1 + f_1(2)\vec{v}_2 = 1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

から  $V(1)$  への射影は  $f_1(A) = -\frac{1}{3}(A - I_3)$  であることが分かります. 他方

$$f_2(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}(\lambda - 1)$$

とすると

$$f_2(A)\vec{v} = f_2(A)\vec{v}_1 + f_2(A)\vec{v}_2 = f_2(1)\vec{v}_1 + f_2(4)\vec{v}_2 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2$$

から  $V(4)$  への射影は  $f_2(A) = \frac{1}{3}(A - I_3)$  であることが分かります.