2021 年 12 月 08 日演習問題解答

VI $A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-1&3&2\\-2&2&6\end{pmatrix}$ を対角化しましょう．

解答

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&2\\1&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2&0\\1&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&0\\1&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&0\\0&\lambda-4&-2\\0&-4&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4&-2\\-4&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

から A の固有値は $\lambda=2$(重根)$,8$ であることが分かります．

次に固有ベクトルを求めます．

(i) $\underline{\lambda=2\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&-2\\2&-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow x-y-2z=0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+2z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\quad(y\neq0\text{ OR }z\neq0)$$

となります．

$$\vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\vec{p_2}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

は平行でないですから，$V(2)$ は 2 次元で，$\vec{p_1},\vec{p_2}$ が基底となります．

(ii)$\underline{\lambda=10\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&4&-2\\0&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}z,\quad y=\frac{1}{2}z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}=\frac{z}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\quad(z\neq0)$$

となります．$||\vec{r_3}||=1$ となるように

$$\vec{p_3}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

と定めます.
　ここで

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

と定めると P は正則行列となります. このことを示すために

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

とします. $V(2) \oplus V(8)$ が一般論から分かりますから

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0},\ c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

が従います. $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$ が成立しますから

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

であることが分かります. よって p が正則であることが分かります. このとき

$$Ap = (A\vec{P}_1\ A\vec{P}_2\ A\vec{P}_3) = (2\vec{P}_1\ 2\vec{P}_2\ 8\vec{P}_3) = (\vec{P}_1\ \vec{P}_2\ \vec{P}_3)\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

から

$$p^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

と対角化されます.

VII $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ に対して以下を示しましょう。
(1) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$
(2) $V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) = \mathbf{K}^3$
(3) 各固有空間 $V(\alpha)$ に対して $\mathbf{K}^3$ から $V(\alpha)$ への射影を A で表しましょう。

解答 (1)

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-6 & 3 & 7 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda+6 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda+6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)\end{aligned}$$

と計算されます.
(2)

$$V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) \subset \mathbf{K}^3$$

から

$$\dim (V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)) \leq \dim \mathbf{K}^3 = 3$$

が分かります．さらに

$$\dim V(-1), \dim V(1), \dim V(2) \geq 1$$

から

$$\dim (V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)) = \dim V(-1) + \dim V(1) + \dim V(2) \geq 3$$

が成立しますから

$$\dim (V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)) = \dim \mathbf{K}^3 = 3$$

であることが分かります．このとき

$$V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2) = \mathbf{K}^3$$

であることが分かります.

(3) $V(-1)$ への射影を P_1, $V(1)$ への射影を P_2, $V(2)$ への射影を P_3 とすると

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{(-1-1)(-1-2)}(A-I)(A-2I) = \frac{1}{6}(A-I)(A-2I) \\ P_2 &= \frac{1}{(1-(-1))(1-2)}(A+I)(A-2I) = -\frac{1}{2}(A+I)(A-2I) \\ P_3 &= \frac{1}{(2-1)(2-(-1))}(A-I)(A+I) = \frac{1}{6}(A-I)(A+I) \end{aligned}$$

となります.

VIII $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化しましょう.

解答 まず固有多項式を求めます.

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 & 2 \\ -4 & \lambda-4 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda & 0 \\ -4 & \lambda-4 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-4 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-8 & 2 \\ 0 & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-9) \end{aligned}$$

から固有値は $\lambda = 0$(重根), 9 であることが分かります．次に固有ベクトルを求めます.

$\lambda = 0$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y - z = 0$$

であるので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0 \text{ OR } y \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

$\underline{\lambda = 9\,のとき}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 0\\ & & y & + & 2z & = & 0\end{array}\right.$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2z\\-2z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

が固有ベクトルであることが分かります.

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \in V(0),\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in V(0),\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} \in V(9)$$

とすると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となります．実際

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

とすると $V(0) \oplus V(9)$ と直和であることから

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}, \quad c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

が分かります．$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$, $\vec{p}_3 \neq \vec{0}$ から

$$c_1 = c_2 = 0,\ c_3 = 0$$

が従いますから，P は正則であることが分かります．さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\vec{0}\ \vec{0}\ 9\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$$

と A は対角化されます.

IX $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ とします。

(1) A の固有ベクトルを求めましょう.

(2) A のスペクトル分解を求めましょう．すなわち $\mathbf{K}^3$ を A の固有空間の直和に表しましょう.

(3) (2) で求めたスペクトル分解において各固有空間への射影を A で表しましょう.

解答　(1)

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)
\end{aligned}
$$

から A の固有値はが $\lambda = 1$ (重根), 4 であることが分かります．次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x+y+z=0
$$

から固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)
$$

となります．これから

$$
\dim V(1) = 2
$$

が分かります.

(ii) $\underline{\lambda = 4 \text{ のとき}}$

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x=y=z
$$

から固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0) \tag{10}
$$

であることが分かります．これから

$$
\dim V(4) = 1
$$

が分かります.

(2)

$$
V(1) \oplus V(4) \subset \mathbf{R}^3
$$

において $\dim(V(1) \oplus V(4)) = \dim V(1) + \dim V(4) = 2+1 = 3$ が成立しますから

$$
V(1) \oplus V(4) = \mathbf{R}^3
$$

と $\mathbf{R}^3$ が a によってスペクトル分解できることが分かります.

(3) 任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ を

$$
\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 \in V(1), \quad \vec{v}_2 \in V(4)
$$

とスペクトル分解します.

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda - 4}{1 - 4} = -\frac{1}{3}(\lambda - 2)$$

とすると

$$f_1(A)\vec{v} = f_1(A)\vec{v}_1 + f_1(A)\vec{v}_2 = f_1(1)\vec{v}_1 + f_1(2)\vec{v}_2 = 1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

から $V(1)$ への射影は $f_1(A) = -\frac{1}{3}(A - I_3)$ であることが分かります. 他方

$$f_2(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}(\lambda - 1)$$

とすると

$$f_2(A)\vec{v} = f_2(A)\vec{v}_1 + f_2(A)\vec{v}_2 = f_2(1)\vec{v}_1 + f_2(4)\vec{v}_2 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2$$

から $V(4)$ への射影は $f_2(A) = \frac{1}{3}(A - I_3)$ であることが分かります.

2021 年 12 月 15 日演習問題解答 WL10_1215SOL

I 教科書第 8 章にある

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

によって $\mathbf{K}^3$ を

$$\mathbf{K}^3 = V(-1) \oplus V(0) \oplus V(9)$$

とスペクトル分解します。任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対してこの分解に応じて

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

と分解するとき

$$P_j \vec{v} = v_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

と $P_j \in M_3(\mathbf{K})$ を用いて表されました。このとき

$$P_1 + P_2 + P_3 = I_3,\ P_j^2 = P_j\ (j = 1, 2, 3),\ P_i P_j = O_3\ (i \neq j)$$

が成立することを示しましょう。ただし固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

と因数分解されるときに C-H の定理によって

$$\Phi_A(A) = (A - \alpha_1 I_3)(A - \alpha_2 I_3)(A - \alpha_3 I_3) = O_3$$

が成立することは用いて構いません。また具体的に P_j を求めて示しましょう。

解答

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &:= \frac{(\lambda - 0)(\lambda - 9)}{(-1 - 0)(-1 - 9)} = \frac{1}{10}\lambda(\lambda - 9) \\ f_2(\lambda) &:= \frac{(\lambda - (-1))(\lambda - 9)}{(0 - (-1))(0 - 9)} = -\frac{1}{9}(\lambda + 1)(\lambda - 9) \\ f_3(\lambda) &:= \frac{(\lambda - (-1))(\lambda - 9)}{(9 - (-1))(9 - 0)} = -\frac{1}{9}(\lambda + 1)(\lambda - 9) \end{aligned}$$

と定義します．このとき

$$\begin{aligned} &f_1(-1) = 1, \quad f_1(0) = 0, \quad f_1(9) = 0 \\ &f_2(-1) = 0, \quad f_2(0) = 1, \quad f_2(9) = 0 \\ &f_3(-1) = 0, \quad f_3(0) = 0, \quad f_3(9) = 1 \end{aligned}$$

が成立します．一般に $A \in M_3(\mathbf{K})$, $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$, $\alpha \in \mathbf{K}$ が

$$A\vec{v} = \alpha\vec{v}$$

を満たすならば，$g(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ に対して

$$g(A)\vec{v} = g(\alpha)\vec{v}$$

が成立します．そこで $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(-1),\ \vec{v}_2 \in V(0),\ \vec{v}_3 \in V(3) \tag{1}$$

とスペクトル分解をすると

$$\begin{aligned}
f_1(A)\vec{v} &= f_1(A)\vec{v}_1 + f_1(A)\vec{v}_2 + f_1(A)\vec{v}_3 f_1(-1)\vec{v}_1 + f_1(0)\vec{v}_2 + f_1(9)\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \\
f_2(A)\vec{v} &= f_2(A)\vec{v}_1 + f_2(A)\vec{v}_2 + f_2(A)\vec{v}_3 f_2(-1)\vec{v}_1 + f_2(0)\vec{v}_2 + f_2(9)\vec{v}_3 = \vec{v}_2 \\
f_3(A)\vec{v} &= f_3(A)\vec{v}_1 + f_3(A)\vec{v}_2 + f_3(A)\vec{v}_3 f_3(-1)\vec{v}_1 + f_3(0)\vec{v}_2 + f_3(9)\vec{v}_3 = \vec{v}_3
\end{aligned}$$

が成立しますから

$$P_1 = f_1(A), \quad P_2 = f_2()A), \quad P_3 = f_3(A)$$

であることが分かります．

次に

$$f_1(\lambda) + f_2(\lambda) + f_3(\lambda) = 1$$

が恒等的に成立することに注意します．両辺が 2 次式以下で $\lambda = -1, 0, 9$ で成立するからです．これから

$$P_1 + P_2 + P_3 = I_3 \tag{2}$$

が従います．(2) 自体は分解 (1) に

$$\vec{v}_1 = P_1\vec{v}, \quad \vec{v}_2 = P_2\vec{v}, \quad \vec{v}_3 = P_3\vec{v}$$

を代入して

$$\vec{v} = P_1\vec{v} + P_2\vec{v} + P_3\vec{v} = (P_1 + P_2 + P_3)\,\vec{v}$$

を導いて示すこともできます．次に

$$P_i P_j = O_3 \quad (i \neq J) \tag{3}$$

が成立することを $P_1 P_2 = O_3$ で示しましょう．

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda) = -\frac{1}{90}(\lambda+1)\lambda(\lambda-9)^2 = -\frac{1}{90}(\lambda-9)\Phi_A(\lambda)$$

となりますから

$$P_1P_2 = P_2P_1 = -\frac{1}{90}(A - 9I_3)\Phi_A(A) = -\frac{1}{90}(A - 9I_3)O_3 = O_3$$

が従います．ここで Cayley-Hamilton の定理

$$\Phi_A(A) = (A + I_3)A(A - 9I_3) = O_3$$

が成立することを用いました．次に

$$P_i^2 = P_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

を示します．$i = 1$ のとき

$$P_1 = P_1(P_1 + P_2 + P_3) = P_1^2 + P_1P_2 + P_1P_3 = P_1^2 + O_3 + O_3 = P_1^2$$

となりますが，$i=2,3$ の場合も同様です．

補足 任意の $\vec{v}\in\mathbf{K}^3$ を

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3,\quad \vec{v}_1\in V(-1),\ \vec{v}_2\in V(0),\ \vec{v}_3\in V(9)$$

とスペクトル分解します．このとき $\vec{v}_1$ をスペクトル分解すると

$$\vec{v}_1=\vec{v}_1+\vec{0}+\vec{0},\quad \vec{v}_1\in V(-1),\ \vec{0}\in V(0),\ \vec{0}\in V(9)$$

となります．$\vec{v}_1=P_1\vec{v}$, $P_1\vec{v}_1=\vec{v}_1$, $P_2\vec{v}_1=\vec{0}$ であることに注意すると

$$P_1^2\vec{v}_1=P_1\vec{v}_1,\quad P_2P_1\vec{v}=\vec{0}$$

であることが分かりますから

$$P_1^2=P_1,\quad P_1P_2=O_3$$

が従います．

II 以下の対称行列 A を直交行列で対角化して A が定める 2 次形式を対応する直交座標変換で簡単にしましょう．

(1) $A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-1&3&2\\-2&2&6\end{pmatrix}$ **(2)** $A=\begin{pmatrix}5&4&-2\\4&5&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ **(3)** $A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-1&6&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}$ **(5)** $A=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&1&4\\2&4&1\end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&2\\1&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2&0\\1&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&0\\1&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&0\\0&\lambda-4&-2\\0&-4&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4&-2\\-4&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

から A の固有値は $\lambda=2$(重根)$,8$ であることが分かります．

次に固有ベクトルを求めます．

(i) $\underline{\lambda=2\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&-2\\2&-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow x-y-2z=0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+2z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\quad(y\neq0\ \mathrm{OR}\ z\neq0)$$

となります．ここで平行でない

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を正規直交化します．まず $\vec{p}_1$ を正規化して

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{||\vec{p}_1||}\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定めます．さらに $\vec{p}_2$ の $\vec{p}_1$ 方向への直交射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{p}_2, \vec{p}_1)}{||\vec{p}_1||^2}\vec{p}_1 = \frac{2}{2}\vec{p}_1 = \vec{p}_1$$

となりますから，$\vec{r}_1$ に垂直なベクトルである $\vec{p}_2 - \vec{w}$ は

$$\vec{p}_2 - \vec{w} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と求められます．これを正規化して

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{||\vec{p}_2 - \vec{p}_2||}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$||\vec{r}_1|| = ||\vec{r}_2|| = 1, \quad (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

が分かります．これが $V(2)$ の正規直交基底となります．

(ii)<u>$\lambda = 10$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}z, \quad y = \frac{1}{2}z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．$||\vec{r}_3|| = 1$ となるように

$$\vec{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると，一般論から $V(2) \perp V(8)$ であることが分かりますから

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

が従います．よって $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2\ A\vec{r}_3) = (2\vec{r}_1\ 2\vec{r}_2\ 8\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 8\end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) &= \left({}^tRA\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \left({}^tRAR\cdot{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\\ &= \left(\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\right) = 2\xi^2 + 2\eta^2 + 8\eta^2\end{aligned}$$

と変換されます．

(2)

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix}\lambda-5 & -4 & 2\\ -4 & \lambda-5 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ -4 & \lambda-5 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -4 & \lambda-5 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-9 & 2\\ 0 & 4 & \lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-9 & 2\\ 4 & \lambda-2\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-1)^2(\lambda-10)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 1$(重根)$, 10$ であることが分かります．

次に固有ベクトルを求めます．

(i) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -4 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + 2y - z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\2x+2y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \quad (x \neq 0 \text{ OR } y \neq 0)$$

となります．ここで平行でない

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

を正規直交化します．まず $\vec{p}_1$ を正規化して

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{||\vec{p}_1||}\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

と定めます．さらに $\vec{p}_2$ の $\vec{p}_1$ 方向への直交射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{p}_2, \vec{p}_1)}{||\vec{p}_1||^2}\vec{p}_1 = \frac{4}{5}\vec{p}_1$$

となりますから，$\vec{r}_1$ に垂直なベクトルである $\vec{p}_2 - \vec{w}$ は

$$\vec{p}_2 - \vec{w} = \vec{p}_2 - \frac{4}{5}\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と求められます．これを正規化して

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{||\vec{p}_2 - \vec{p}_2||}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$||\vec{r}_1|| = ||\vec{r}_2|| = 1, \quad (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

が分かります．これが $V(1)$ の正規直交基底となります．

(ii)$\underline{\lambda = 8\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow x = -2z, \quad y = -2z$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．$||\vec{r}_3|| = 1$ となるように

$$\vec{r}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると，一般論から $V(1) \perp V(10)$ であることが分かりますから

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_3) = (\vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0$$

が従います．よって $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2\ A\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ 10\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\left({}^tRA\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\left({}^tRAR\cdot{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$$
$$=\left(\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\right)=\xi^2+\eta^2+10\eta^2$$

と変換されます.

(3)

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&1\\1&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&4-\lambda\\1&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-3\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&\lambda-1&2\\0&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\1&\lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=\lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$$

から A の固有値は $\lambda=0,3,4$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda=0\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x-z=0,\quad y-2z=0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\2z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\quad(z\neq0)$$

となります．特に $||\vec{r}_1||=1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

とします.

(ii) $\underline{\lambda=3\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad\Leftrightarrow x-z=0,\quad y+z=0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\-z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad(z\neq0)$$

となります．特に $||\vec{r}_2|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします．

(iii) $\underline{\lambda = 4 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow x + z = 0, \quad y = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．特に $||\vec{r}_3|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします．

一般論から

$$V(0) \perp V(3), \quad V(0) \perp V(4), \quad V(3) \perp V(4)$$

であることが分かりますから

$$(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が従います．さらに

$$||\vec{r}_j|| = 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

と $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ を選んでいます．よって $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2\ A\vec{r}_3) = (0\vec{r}_1\ 3\vec{r}_2\ 4\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \left({}^tRA\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \left({}^tRAR \cdot {}^tR\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}\right) = 3\eta^2 + 4\eta^2$$

と変換されます.

(4)

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -2 \\ 1 & \lambda-6 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda-6 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-6 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 0 & \lambda-6 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-7)
\end{aligned}
$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 4, 7$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$
$$
\Leftrightarrow x + z = 0, \quad y = 0
$$

であることが分かりますから, 固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)
$$

となります. 特に $||\vec{r}_1|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$
\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

とします.

(ii) $\underline{\lambda = 4 \text{ のとき}}$

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow x - z = 0, \quad y - z = 0
$$

であることが分かりますから, 固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)
$$

となります. 特に $||\vec{r}_2|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$
\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

とします.

(iii) $\underline{\lambda = 7\text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow x - z = 0, \quad y + 2z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となります．特に $||\vec{r}_3|| = 1$ を満たす固有ベクトルとして

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

とします．

一般論から

$$V(1) \perp V(4), \quad V(1) \perp V(7), \quad V(4) \perp V(7)$$

であることが分かりますから

$$(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が従います．さらに

$$||\vec{r}_j|| = 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

と $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ を選んでいます．よって $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2\ A\vec{r}_3) = (1\vec{r}_1\ 4\vec{r}_2\ 7\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&7\end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) &= \left({}^tRA\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \left({}^tRAR\cdot{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, {}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\\ &= \left(\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\right) = \xi^2 + 4\eta^2 + 7\eta^2\end{aligned}$$

と変換されます．

(5)

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ 0 & \lambda-5 & \lambda-5 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -4 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

から A の固有値は $\lambda = 5$(重根), -4 であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

(i) $\underline{\lambda = 5 \text{ のとき}}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y - 2z = 0$$

であることが分かりますから，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

となります．ここで平行でない

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を正規直交化します．まず $\vec{p}_1$ を正規化して

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{||\vec{p}_1||}\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定めます．さらに $\vec{p}_2$ の $\vec{p}_1$ 方向への直交射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{p}_2, \vec{p}_1)}{||\vec{p}_1||^2}\vec{p}_1 = -\frac{4}{5}\vec{p}_1$$

となりますから，$\vec{r}_1$ に垂直なベクトルである $\vec{p}_2 - \vec{w}$ は

$$\vec{p}_2 - \vec{w} = \vec{p}_2 + \frac{4}{5}\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と求められます．これを正規化して

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{||\vec{p}_2 - \vec{p}_2||}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$||\vec{r}_1|| = ||\vec{r}_2|| = 1, \quad (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

が分かります．これが $V(5)$ の正規直交基底となります．

(ii)<u>$\lambda=-4$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-8&0&-4\\0&1&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}z=0,\quad y+z=0$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\-z\\z\end{pmatrix}=\frac{z}{2}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\qquad(z\neq 0)$$

となります．$||\vec{r}_3||=1$ となるように

$$\vec{r}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

と定めると，一般論から $V(5)\perp V(-4)$ であることが分かりますから

$$(\vec{r}_1,\vec{r}_3)=(\vec{r}_2,\vec{r}_3)=0$$

が従います．よって $R=(\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$ は直交行列であることが分かります．このとき

$$AR=(A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2\ A\vec{r}_3)=(5\vec{r}_1\ 5\vec{r}_2\ -4\vec{r}_3)=(\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)\begin{pmatrix}5&&\\&5&\\&&-4\end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき直交座標変換

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

によって A が定める 2 次形式は

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\left({}^tRA\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\left({}^tRAR\cdot{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},{}^tR\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{pmatrix}5&&\\&5&\\&&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\right)=5\xi^2+5\eta^2-4\eta^2$$

と変換されます．

III $A=\begin{pmatrix}15&-5&-6\\5&-2&-3\\27&-9&-10\end{pmatrix}$ とします。以下では

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

であることを用いても構いません．A が対角化できないことを示しましょう．

解答 **解答 1**

$$(A+I_3)(A-2I_3)=\begin{pmatrix}16 & -5 & -6\\ 5 & -1 & -3\\ 27 & -9 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13 & -5 & -6\\ 5 & -4 & -3\\ 27 & -9 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & * & *\\ * & 38 & *\\ * & * & *\end{pmatrix}\neq O_3$$

から A が対角化可能でないことが分かります.

解答 2 $\dim V(-1)\geq 2$ とすると $(\lambda+1)^2|\Phi_A(\lambda)$ となりますから，あり得ません．従って

$$\dim V(-1)=1$$

であることが分かります．さらに

$$A-2I_3=\begin{pmatrix}13 & -5 & -6\\ 5 & -4 & -3\\ 27 & -9 & -12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}13 & -5 & -6\\ 5 & -4 & -3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

から $\dim V(2)=1$ が分かります．以上から

$$\dim(V(-1)\oplus V(2))=2$$

となりますから

$$V(-1)\oplus V(2)\subsetneq \mathbf{K}^3$$

となります．従って A は対角化可能ではありません．

IV $P\in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$(P\vec{v},P\vec{w})=(\vec{v},\vec{w})\quad(\vec{v},\vec{w}\in\mathbf{R}^n)\tag{1}$$

と

$$||P\vec{v}||=||\vec{v}||\quad(\vec{v}\in\mathbf{R}^n)\tag{2}$$

が必要十分であることを証明しましょう。

解答 (1)⇒(2)

(1) において $\vec{w}=\vec{v}$ の場合を考えると

$$||P\vec{v}||^2=||\vec{v}||^2$$

となりますから，(2) が従います.

(2)⇒(1) $\vec{v}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$(\vec{v},\vec{w})=\frac{1}{4}\left(||\vec{v}+\vec{w}||^2-||\vec{v}-\vec{w}||^2\right)$$

が成立することを用います．実際

$$\begin{aligned}(P\vec{v},P\vec{w})&=\frac{1}{4}\left(||P\vec{v}+P\vec{w}||^2-||P\vec{v}-P\vec{w}||^2\right)=\frac{1}{4}\left(||P(\vec{v}+\vec{w})||^2-||P(\vec{v}-\vec{w})||^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left(||\vec{v}+\vec{w}||^2-||\vec{v}-\vec{w}||^2\right)=(\vec{v},\vec{w})\end{aligned}$$

と (2) から (1) を導くことができます.

V 3 次の直交行列の全体を $O(3)$ とします．$P_1, P_2 \in O(3)$ ならば $P_1P_2 \in O(3)$, ${}^tP_1 \in O(3)$ であることを示しましょう

解答

$$
\begin{aligned}
(P_1P_2)\, P_1P_2 &= {}^tP_2\, {}^tP_1P_1P_2 \\
&= {}^tP_2I_3P_2 = {}^tP_2P_2 = I_3 \\
P_1P_2\, (P_1P_2) &= P_1P_2{}^tP_2\, {}^tP_1 \\
&= P_1I_3{}^tP_1 = P_1{}^tP_1 = I_3
\end{aligned}
$$

から P_1P_2 が直交行列であることが分かります．他方

$$
\begin{aligned}
{}^t\left({}^tP_1\right)\, {}^tP_1 = P_1\, {}^tP_1 = I_3 \\
{}^tP_1{}^t\left({}^tP_1\right) = {}^tP_1P_1 = I_3
\end{aligned}
$$

から ${}^tP_1$ が直交行列であることが分かります.

VI $A \in M_3(\mathbf{R})$ は対称とします。A が定める 2 次形式は正定値、すなわち

$$(A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

が成立するとします。
(1) A が正則であることを示しましょう。
(2) A^{-1} が対称であることを示しましょう。
(3) A^{-1} が定める 2 次形式が正定値であること、すなわち

$$(A^{-1}\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

であることを示しましょう。

解答 (1)（解 1）

$A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して (i) A は正則 $\;\Leftrightarrow\;$ (ii) $\left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}\right)$ $\;\Leftrightarrow$ (iii) $\det(A) \neq 0$

が成立することを用います．A が正則でないとするとある $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ が

$$A\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

が成立しますが,

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

となりますが，これは A が定める 2 次形式が正定値であることに反します．よって A は正則であることが分かります.
（解 2）

対称な $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\text{(i)}(A\vec{v},\vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \text{(ii)}A\text{の固有値}\alpha,\beta,\gamma > 0$$
$$\Leftrightarrow \text{(iii)}a_{11} > 0,\ \det(A_2) > 0,\ \det(A) > 0$$

が成立します．ただし $A = \left(\begin{smallmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{smallmatrix}\right)$ に対して $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} a & p \\ p & b \end{smallmatrix}\right)$ と定めています．

これを用いると $\det(A) > 0$ から A が正則であることが分かります．

(2)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$$

の各辺の転置行列を考えると

$${}^t\left(A^{-1}\right){}^tA = {}^tA^t\left(A^{-1}\right) = I_3$$

が成立します．A が対称ですから

$${}^t\left(A^{-1}\right)A = A^t\left(A^{-1}\right) = I_3$$

となりますが，逆行列の一意性から

$$A^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

が導かれます．従って A^{-1} が対称であることが分かります．

(3)（解 1） 任意の $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ が $\vec{x} \neq \vec{0}$ を満たすとします．このとき $\vec{y} = A^{-1}\vec{x}$ に対して $\vec{y} \neq \vec{0}$ が成立します．ここで

$$(A^{-1}\vec{x},\vec{x}) = (\vec{y},A\vec{y}) > 0$$

となりますから A^{-1} が正定値な 2 次形式を定めることが分かります．

（解 2） A を直交行列で

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

と対角化します．このとき両辺の逆行列は

$${}^tPA^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & & \\ & \frac{1}{\beta} & \\ & & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

となります．これから A^{-1} の固有値は

$$\Phi_{A^{-1}}(\lambda) = \Phi_{{}^tPA^{-1}P}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\frac{1}{\alpha} & & \\ & \lambda-\frac{1}{\beta} & \\ & & \lambda-\frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} = \left(\lambda-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\lambda-\frac{1}{\beta}\right)\left(\lambda-\frac{1}{\gamma}\right)$$

から $A = \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma} > 0$ となります．このことから A^{-1} が定める 2 次形式が正定値であることが従います．

VII $A \in M_{m,3}(\mathbf{R})$ とします。すなわち A が $m \times 3$ 型の行列とします。$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ と列ベクトル表示をします。また $B = {}^t AA$ と定めます。
(1) B が非負定値であること、すなわち

$$(B\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^3)$$

が成立することを示しましょう。
(2) B が正定値であることと $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が線型独立であることが必要十分であることを示しましょう。

解答 (1)

$$(B\vec{v}, \vec{v}) = ({}^t A\vec{v}, \vec{v}) = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ||A\vec{v}||2 \geq 0 \tag{11}$$

から B が定める 2 次形式が非負定値であることが分かります.

(2) B が定める 2 次形式が正定値であるとします. このとき (11) において $\vec{v} \neq \vec{0}$ ならば $||A\vec{v}||^2 \neq 0$ 従って

$$A\vec{v} \neq \vec{0} \quad \text{すなわち} \quad v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c} \not\vec{0}$$

が分かります. これは対偶をとると

$$v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}\vec{0} \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

となりますから $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立であることを意味します.

逆に $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立であると仮定します. これは

$$\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow A\vec{v} \neq \vec{0}$$

と必要十分です. これから

$$\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow 0 < ||A\vec{v}||^2 = (B\vec{v}, \vec{v})$$

が従います.

VIII $B \in M_3(\mathbf{R})$ は対称とします。
(1) B が非負定値であることと B の固有値 α, β, γ が

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

であることが必要十分であることを示しましょう。
(2) B が非負定値であるとき B が正定値であることと $\det(B) > 0$ が必要十分であることを示しましょう.

解答　(1)
B が非負定値の 2 次形式を定めるとします. B を直交行列 P で

$$^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \tag{12}$$

と対角化します. このとき

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \quad A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

となりますが

$$0 \leq (B\vec{p}_1, \vec{p}_1) = (\alpha\vec{p}_1, \vec{p}_1) = \alpha \cdot ||\vec{p}_1||^2 = \alpha$$

から $\alpha \geq 0$ が分かります. 同様に $\beta, \gamma \geq 0$ も分かります.
逆に, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ とします. 上で考えた B の直交行列による対角化を用います. すなわち P が定める直交座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ を用いると

$$\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 \geq 0$$

となりますから, B が定める 2 次形式は非負定値であることが分かります.
(2)
B が定める 2 次形式が正定値であると仮定します. このとき, B の固有値は $\alpha, \beta, \gamma > 0$ となります. このとき (12) の行列式を考えると

$$\det(B) = \det(^tPBP) = \alpha\beta\gamma > 0$$

となります.
逆に $\det(B) > 0$ と仮定します. このとき

$$\alpha\beta\gamma = \det(B) > 0$$

から

$$\alpha, \beta, \gamma \neq 0$$

が分かります. B が非負定値の 2 次形式を定めることを前提としていますから,

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

が成立しています. 以上を合わせて

$$\alpha, \beta, \gamma > 0$$

が従います.

IX $\mathbf{R}^3$ 中の部分空間

$$V_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3; x - y + z = 0\}, \quad V_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3; x + y + z = 0\}$$

を考えます。V_1 に関する鏡映を Q_1, V_2 に関する鏡映を Q_2 として

$$R = Q_1 Q_2$$

を考えます。

(1)

$$R\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を示しましょう。

(2) $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を含む $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求めましょう。（以下 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ とします。）

(3) $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ として、座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

を用いて R を表しましょう。

解答　**(1)** $\vec{p}_1 \in V_1$ から $Q_1\vec{p}_1 = \vec{p}_1$ が分かります. さらに $\vec{p}_1 \in V_2$ から $Q_2\vec{p}_1 = \vec{p}_1$ が分かります. これから

$$R\vec{p}_1 = Q_1Q_2\vec{p}_1 = Q_1\vec{p}_1 = \vec{p}_1$$

が従います.

(2) V_2 の法線ベクトルを正規化して

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします. このとき $(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$ となります. さらに

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底となります.

(3) 構成法から $\vec{p}_3 \in V_2$ であることが分かります. 従って

$$Q_2\vec{p}_2 = -\vec{p}_2, \quad Q_2\vec{p}_3 = \vec{p}_3$$

となります. 従って $Q_1\vec{p}_2$, $Q_1\vec{p}_3$ を求めれば $R\vec{p}_2$, $R\vec{p}_3$ が求まります. V_1 の法線ベクトルを

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$Q_1\vec{v} = -(\vec{q}_1, \vec{v})\vec{q}_1 + (\vec{v} - (\vec{q}_1, \vec{v})\vec{q}_1) = \vec{v} - 2(\vec{q}_1, \vec{v})\vec{q}_1$$

となります．これを用いると

$$Q_1\vec{p}_2 = \vec{p}_2 - 2(\vec{q}_1, \vec{p}_2) = \vec{p}_2 - \frac{2}{3}\vec{q}_1$$
$$Q_1\vec{p}_3 = \vec{p}_3 - 2(\vec{q}_1, \vec{p}_3) = \vec{p}_3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\vec{q}_1$$

となります．$Q_1\vec{p}_2$，$Q_1\vec{p}_3$ を $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ の線型結合で表すためには $\vec{q}_1$ を $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ の線型結合で表す必要がありますが

$$\vec{q}_1 = (\vec{q}_1, \vec{p}_2)\vec{p}_2 + (\vec{q}_1, \vec{p}_3)\vec{p}_3 = \frac{1}{3}\vec{p}_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{p}_3$$

と求まります．これから

$$Q_1\vec{p}_2 = \vec{p}_2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{p}_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{p}_3\right) = \frac{7}{9}\vec{p}_2 - \frac{4\sqrt{2}}{9}\vec{p}_3$$
$$Q_1\vec{p}_3 = \vec{p}_3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}(\frac{1}{3}\vec{p}_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{p}_3) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}\vec{p}_2 - \frac{7}{9}\vec{p}_3$$

であることが分かります．さらに $R\vec{p}_2$，$R\vec{p}_3$ を求めると

$$R\vec{p}_2 = -Q_1\vec{p}_2 = -\frac{7}{9}\vec{p}_2 + \frac{4\sqrt{2}}{9}\vec{p}_3$$
$$R\vec{p}_3 = Q_1\vec{p}_3 = -\frac{4\sqrt{2}}{9}\vec{p}_2 - \frac{7}{9}\vec{p}_3$$

となります．以上で

$$RP = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{9} & -\frac{4\sqrt{2}}{9} \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{9} & -\frac{4\sqrt{2}}{9} \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

となります．

X (1) $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を含む $\mathbf{R}^3$ の基底 $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ で

$$\det(\vec{f}_1\ \vec{f}_2\ \vec{f}_3) = 1$$

を満たすものを求めましょう。

(2) $\vec{f}_1$ を軸として $\frac{\pi}{3}$ 回転する行列を求めましょう。すなわち基底 $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ で表現すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる行列を求めましょう。

解答 **(1)** $\vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ とすると $||\vec{f_2}|| = 1,\ (\vec{f_1}, \vec{f_2}) = 0$ が成立します．さらに

$$\vec{f_3} = \vec{f_1} \times \vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-2\end{smallmatrix}\right)$$

とすると外積の幾何的な性質から

$$(\vec{f_3}, \vec{f_1}) = (\vec{f_3}, \vec{f_2}) = 0, \quad ||\vec{f_3}|| = 1$$

であることが分かります．さらに

$$1 = ||\vec{f_3}||^2 = ||\vec{f_1} \times \vec{f_2}||^2 = (\vec{f_1} \times \vec{f_2}, \vec{f_3}) = \det(\vec{f_1}\ \vec{f_2}\ \vec{f_3})$$

も成立します.

(2) $F = (\vec{f_1}\ \vec{f_2}\ \vec{f_3})$ と定めます．このとき求める行列を R とすると

$$RF = F\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

から R は

$$R = F\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}{}^tF = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{smallmatrix}\right)$$

と求まります.