

2021 年 12 月 15 日演習問題 (その 2) 解答 WL10_1215SOL (その 2)

$$\text{I } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ とします。Cayley-Hamilton の定理を用いて } B^{-1} \text{ を計算しましょう。}$$

解答 まず B の固有多項式を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & 4-\lambda \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-4) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-4) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-3) \\ &= \lambda^3 - 9\lambda + 26\lambda - 24 \end{aligned}$$

から Cayley-Hamilton の定理によって

$$B^3 - 9B^2 + 26B - 24I_3 = O_3$$

であることが分かります。両辺に B^{-1} を掛けると

$$B^{-1} = \frac{1}{24}(B^2 - 9B + 26I_3)$$

が従います。

$$\text{II } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ とします。}$$

(1) A の固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

であることを示しましょう。

(2) 直和分解

$$\mathbf{K}^3 = V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$$

において $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

と直和分解 (スペクトル分解) するとき

$$f_i(A)\vec{v} = \vec{v}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

となる多項式 $f_i(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ を求めましょう。

(3) (2) を用いて B^n を B^2, B, I_3 で表しましょう。

解答 (1)

$$\begin{aligned}\Phi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}f_1(\lambda) &= \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda-3) \\ f_2(\lambda) &= \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{(2-1)(2-3)} = -(\lambda-1)(\lambda-3) \\ f_3(\lambda) &= \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)\end{aligned}$$

(3) $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_j \in V(j) \quad (j = 1, 2, 3)$$

とスペクトル分解します。すると

$$\begin{aligned}B^n \vec{v} &= 1^n \vec{v}_1 + 2^n \vec{v}_2 + 3^n \vec{v}_3 \\ &= \left\{ \frac{1}{2}(B - 2I_3)(B - 3I_3) - 2^n(B - I_3)(B - 3I_3) + \frac{3^n}{2}(B - I_3)(B - 2I_3) \right\} \vec{v}\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}B^n &= \frac{1}{2}(B - 2I_3)(B - 3I_3) - 2^n(B - I_3)(B - 3I_3) + \frac{3^n}{2}(B - I_3)(B - 2I_3) \\ &= \left(\frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2} \right) B^2 - \left(\frac{5}{2} - 4 \cdot 2^n + \frac{3}{2} 3^n \right) B + (3 - 3 \cdot 2^n + 3^n) I_3\end{aligned}$$

であることが分かります。

III $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbf{R}$ とします。

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

に対して

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$$

が成立することを示しましょう。

解答略

IV $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ が対角化可能であることを示して、 \mathbf{K}^3 をスペクトル分解しましょう（固有空間の直和で表す）。さらに各固有空間への射影を A で表わしましょう。

解答

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -6 \\ -3 & \lambda-1 & -6 \\ 3 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 \\ 3 & \lambda+5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda - 2) \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

から A の固有多項式の根はすべて単純であることが分かります。これから A は対角化可能であることが従います。よって

$$\mathbf{R}^3 = V(-1) \oplus V(1) \oplus V(2)$$

であることが分かります。 $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_{-1} + \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_{-1} \in V(-1), \quad \vec{v}_1 \in V(1), \quad \vec{v}_2 \in V(2)$$

とスペクトル分解すると

$$\begin{aligned} f_{-1}(\lambda) &= \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(\lambda-1)(\lambda-2) \\ f_1(\lambda) &= \frac{(\lambda+1)(\lambda-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2) \\ f_2(\lambda) &= \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(\lambda+1)(\lambda-1) \end{aligned}$$

によって

$$\begin{aligned} \vec{v}_{-1} &= f_{-1}(A)\vec{v} \\ \vec{v}_1 &= f_1(A)\vec{v} \\ \vec{v}_2 &= f_2(A)\vec{v} \end{aligned}$$

と表せます。

V $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とします。Cayley-Hamilton の定理を用いて A^n を計算しましょう。

解答 まず A の固有多項式を計算します.

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-9 & -2 & 4 \\ 4 & \lambda-3 & -4 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-5 & \lambda-5 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & -4 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & -4 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-7 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)\end{aligned}$$

となります. λ^n を $\Phi_A(\lambda)$ で割ることを考えます.

$$\lambda^n = q(\lambda)\Phi_A(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

とすると

$$\begin{cases} 3^2a + 3b + c = 3^n \\ 5^2a + 5b + c = 5^n \\ 7^2 + 7b + c = 7^n \end{cases}$$

が成立します.

$$B = \begin{pmatrix} 3^2 & 3 & 1 \\ 5^2 & 5 & 1 \\ 7^2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ \frac{35}{8} & -\frac{21}{4} & \frac{15}{8} \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{8} \cdot 3^n - \frac{1}{4} \cdot 5^n + \frac{1}{8} \cdot 5^n \\ b &= -\frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{5}{2} \cdot 5^n - 5^n \\ c &= \frac{35}{8} \cdot 3^n - \frac{21}{4} \cdot 5^n + \frac{15}{8} \cdot 5^n\end{aligned}$$

であることが分かります. このとき

$$A^n = \left(\frac{1}{8} \cdot 3^n - \frac{1}{4} \cdot 5^n + \frac{1}{8} \cdot 5^n \right) A^2 + \left(-\frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{5}{2} \cdot 5^n - 5^n \right) A + \left(\frac{35}{8} \cdot 3^n - \frac{21}{4} \cdot 5^n + \frac{15}{8} \cdot 5^n \right) I_3$$

であることが分かります.

VI $A \in M_3(\mathbf{C})$ が $\det(A) \neq 0$ を満たします.

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

のとき $\Phi_{A^{-1}}(\lambda)$ を求めましょう.

解答 正則な $P \in M_3(\mathbf{C})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

と三角化します. 両辺の行列式を考えると

$$|A| = |P^{-1}AP| = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$$

であることが分かります。他方

$$(P^{-1}A^{-1}P)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

となります。この右辺を

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & x & y \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & z \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix}$$

として求めます。実際

$$P^{-1}AP \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & x & y \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & z \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}a & y\alpha_1 + az + \frac{1}{\alpha_3}b \\ 0 & 1 & z\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$x = -\frac{a}{\alpha_1\alpha_2}, \quad z = -\frac{c}{\alpha_2\alpha_3}, \quad y = -\frac{1}{\alpha_1} \left(az + \frac{1}{\alpha_3}b \right)$$

とすると

$$B = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

であることが分かります。このことから

$$\begin{aligned} \Phi_{A^{-1}}(\lambda) &= \Phi_{P^{-1}A^{-1}P}(\lambda) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\alpha_1} & * & * \\ 0 & \lambda - \frac{1}{\alpha_2} & * \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{1}{\alpha_3} \end{vmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{\alpha_1} \right) \left(\lambda - \frac{1}{\alpha_2} \right) \left(\lambda - \frac{1}{\alpha_3} \right) \end{aligned}$$

であることが分かります。

VII $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ とします。 $A \in M_3(\mathbf{K})$ があって

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{K}$ に対して満たします。このとき

$$\Phi_{f(A)}(\lambda)$$

を求めましょう。

解答 正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & b \\ 0 & \alpha_2 & c \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

と三角化します. このとき帰納法によって

$$P^{-1}A^{\ell}P = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\ell} & a & b \\ 0 & \alpha_2^{\ell} & c \\ 0 & 0 & \alpha_3^{\ell} \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

$$f(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

とすると

$$\begin{aligned} P^{-1}f(A)P &= f(P^{-1}AP) \\ &= a_m \begin{pmatrix} \alpha_1^m & * & * \\ 0 & \alpha_2^m & * \\ 0 & 0 & \alpha_3^m \end{pmatrix} + a_{m-1} \begin{pmatrix} \alpha_1^{m-1} & * & * \\ 0 & \alpha_2^{m-1} & * \\ 0 & 0 & \alpha_3^{m-1} \end{pmatrix} + \cdots + a_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} + a_0 I_3 \\ &= \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & * & * \\ 0 & f(\alpha_2) & * \\ 0 & 0 & f(\alpha_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります. 従って

$$\begin{aligned} \Phi_{f(A)}(\lambda) &= \Phi_{P^{-1}f(A)P}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - f(\alpha_1) & * & * \\ 0 & \lambda - f(\alpha_2) & * \\ 0 & 0 & \lambda - f(\alpha_3) \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - f(\alpha_1))(\lambda - f(\alpha_2))(\lambda - f(\alpha_3)) \end{aligned}$$

であることが分かります.