2021 年 12 月 22 日演習問題解答 WL11_1215SOL

L13 2020 年 10 月 30 日確認問題

I (1) $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{R}^n$ が正規直交系であることと ${}^tPP = I_3$ を満たすこととが必要十分であることを示しましょう.
(2) $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{R}^n$ が正規直交系であるとします. 3 次正方行列 R に対して

$$(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)R$$

として $\vec{q}_j \in \mathbf{R}^n$ $(j = 1, 2, 3)$ を定めると

$$R \text{ が直交行列 } \Leftrightarrow \vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \text{ が正規直交系}$$

であることを示しましょう.

解答 (1)

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||\vec{p}_1|| & (\vec{p}_1, \vec{p}_2) & (\vec{p}_1, \vec{p}_3) \\ (\vec{p}_2, \vec{p}_1) & ||\vec{p}_2|| & (\vec{p}_2, \vec{p}_3) \\ (\vec{p}_3, \vec{p}_1) & (\vec{p}_3, \vec{p}_2) & ||\vec{p}_3|| \end{pmatrix} $$

から

$$\begin{aligned} {}^tPP = I_3 \quad &\Leftrightarrow \quad (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3 \text{は正規直交系である} \end{aligned}$$

ことが分かります.
(2) $Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$ とすると

$$ {}^tQQ = {}^tR{}^tPPR = {}^tRR $$

であることが分かります. このとき

$$\begin{aligned} \vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \text{が正規直交系である} \Leftrightarrow \quad & {}^tQQ = I_3 \\ \Leftrightarrow \quad & {}^tRR = I_3 \\ \Leftrightarrow \quad & R\text{は直行行列である} \end{aligned}$$

ことが分かります.

II **(1)** $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{pmatrix}$ を計算して $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \beta & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & B \end{array}\right)$ を求めましょう.

(2) ${}^t\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & r & s \end{pmatrix}$ を計算して $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して ${}^t\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & A \end{array}\right)$ を求めましょう.

(3) 2 次正方行列 $R \in M_2(\mathbf{R}$ が回転行列（より一般には直交行列）とします. このとき $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & R \end{array}\right)$ が直交行列であることを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & px+qz & py+qw \\ 0 & rx+sz & ry+sw \end{pmatrix}$$

から

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \beta & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\beta & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & AB \end{array}\right)$$

であることが分かります.

(2)

$${}^t\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & r & s \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & r \\ 0 & q & s \end{pmatrix}$$

から

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & A \end{array}\right) = {}^t\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & {}^tA \end{array}\right)$$

であることが分かります.

(3)

$$\begin{aligned} {}^t\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & R \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & R \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & {}^tR \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & R \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & {}^tRR \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & I_2 \end{array}\right) = I_3 \end{aligned}$$

から $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & R \end{array}\right)$ が直交行列であることが分かります.

III $A \in M_3(\mathbf{R})$ が対称とします.
(1) $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$, $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ならば $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ が $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3$, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して成立することを示しましょう.
(2) $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \in \mathbf{R}^3$ が正規直交系とします. $A\vec{q}_1 = \alpha\vec{q}_1$ が成立するとき

$$A(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

と $a, b, c \in \mathbf{R}$ を用いて表されることを示しましょう.

解答 (1)

$$(\vec{v}, A\vec{w}) = ({}^tA\vec{v}, \vec{w}) = (A\vec{v}, \vec{w}) = (\alpha\vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

(2) $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ が $\mathbf{R}^3$ の基底ですから

$$A\vec{q}_2 = f_1\vec{q}_1 + f_2\vec{q}_2 + f_3\vec{q}_3, \quad A\vec{q}_3 = g_1\vec{q}_1 + g_2\vec{q}_2 + g_3\vec{q}_3$$

さらに (1) から

$$0 = (A\vec{q}_2, \vec{q}_1) = f_1, \quad 0 = (A\vec{q}_3, \vec{q}_1) = g_1$$

であることが分かります. さらに A が対称ですから

$$(A\vec{q}_2, \vec{q}_3) = (\vec{q}_2, A\vec{q}_3)$$

から

$$f_3 = g_2$$

が分かります. ここで $f_2 = a, f_3 = g_2 = c, g_3 = b$ とすると

$$A(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

IV $A \in M_3(\mathbf{R})$ が対称とします.
(1)

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \geq 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3\right) \Leftrightarrow A\text{の固有値}\alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

であることを示しましょう.
(2)

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \geq 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3\right)$$

ならば

$$a_{11}, a_{22}, a_{33} \geq 0, \quad |A_2| \geq 0, \quad |A| \geq 0$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1) 直交行列 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ が存在して

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

が成立して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

と直交座標変換をすると

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2$$

が成立します.

<u>$(\Rightarrow)$</u>

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \quad A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

から

$$0 \leq (A\vec{p}_1, \vec{p}_1) = \alpha, \quad 0 \leq (A\vec{p}_2, \vec{p}_2) = \beta, \quad 0 \leq (A\vec{p}_3, \vec{p}_3) = \gamma$$

<u>$(\Leftarrow)$</u>

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 \geq 0$$

が $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ から成立します.

(2)

$$0 \leq (A\vec{e}_1, \vec{e}_1) = a_{11}, \quad 0 \leq (A\vec{e}_2, \vec{e}_2) = a_{22}, \quad 0 \leq (A\vec{e}_3, \vec{e}_3) = a_{33}$$

次に対称な $B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned} (B\vec{v}, \vec{v}) \geq 0 \Leftrightarrow B\text{の固有値}\alpha, \beta \geq 0 \\ a, b \geq 0,\ |B| \geq 0 \end{aligned}$$

であることを用います. $A = \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}$ とすると

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

となります. このとき $|A_2| \geq 0$ が従います.

最後に A の固有値 $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

が成立しますから,

$$|A| = |P^{-1}AP| = \begin{vmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \geq 0$$

が成立します.

V 以下の 2 次形式が正定値となる $a \in \mathbf{R}$ の条件を求めましょう.
(1) $x^2+3y^2+2z^2+2axy+4axz+2yz$
(2) $x^2+y^2+z^2+2a(xy+yz+zx)$

解答 (1) $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式ですから,

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 3 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

が求める条件です.

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 3 \end{vmatrix} = 3-a^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3}<a<\sqrt{3} \tag{\$}$$

となります. 次に

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1-2a^2)$$

となりますから

$$(\$)\ \text{AND}\ |A|>0 \Leftrightarrow (\$)\ \text{AND}\ 1-2a^2>0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

であることが分かります.

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式ですから,

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} > 0$$

が求める条件です.

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1-a^2>0 \ \Leftrightarrow \ -1<a<1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(2a+1)>0 \quad \Leftrightarrow \quad a>-\frac{1}{2} \quad \text{AND} \quad a \neq 1$$

から条件は

$$-\frac{1}{2}<a<1$$

であることが分かります.

VI 以下では、実対称行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$(A\vec{x},\vec{x}) \geq 0(\vec{x} \in \mathbf{R}^2) \Leftrightarrow A\text{の固有値}\alpha,\beta \geq 0$$
$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\text{のとき}a,b \geq 0, |A| \geq 0$$

であることを用います。$m \times 2$ 行列 $B = (\vec{a}\ \vec{b})$ に対して不等式

$$|(\vec{a},\vec{b})| \leq ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$$

が成立することを示しましょう。さらに不等式の等号成立条件を求めましょう。

解答 $B = {}^t AA$ は対称行列で，任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(B\vec{v},\vec{v}) = ({}^t AA\vec{v},\vec{v}) = (A\vec{v},A\vec{v}) = ||A\vec{v}||^2 \geq 0$$

が成立します．さらに

$$B = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||\vec{a}||^2 & (\vec{a},\vec{b}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & ||\vec{b}||^2 \end{pmatrix}$$

が成立します．これから

$$\left(|B| = ||\vec{a}||^2 \cdot ||\vec{b}||^2 - (\vec{a},\vec{b})^2 \geq 0\right)$$

が成立します．これから

$$|(\vec{a},\vec{b})| \leq ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$$

が従います．この等号成立の必要十分条件は $|B| = 0$ ですが，この条件は

$$\ker(B) = \ker({}^t AA) \neq \{\vec{0}\}$$

と必要十分です．他方，一般に

$$\ker({}^t AA) = \ker(A)$$

が成立しますから，条件は

$$\ker(A) \neq \{\vec{0}\}$$

と必要十分であることが分かります．$A = (\vec{a}\ \vec{b})$ に対してこの条件は

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$

と必要十分です．

VII $\mathbf{R}^4$ の部分空間

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} ; \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$$

を定めます。そして V の基底を

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

と取ります。

(1) $V_2 = \mathbf{R}\vec{q}_1 + \mathbf{R}\vec{q}_2$ の正規直交基底基底を求めましょう。

(2) $\vec{q}_2$ の V_2 への直交射影を求めて、V の正規直交基底を求めましょう。

$\vec{w}_1$ を $\vec{q}_2$ の $\vec{q}_1$ 方向への直交射影とすると

$$\vec{w}_1 = \frac{(\vec{q}_2, \vec{q}_1)}{||\vec{q}_1||^2}\vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と求まります．ここで $\vec{q}_1$ に垂直な V のベクトルとして

$$\vec{q}_2 - \vec{w}_1 = \vec{q}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれます．このとき

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{||\vec{q}_1||}\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{||\vec{q}_2 - \vec{w}_1||}(\vec{q}_2 - \vec{w}_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in V$ は正規直交系です．さらに $\vec{q}_3$ の $V_0 = \mathbf{R}\vec{p}_1 + \mathbf{R}\vec{p}_2$ への直交射影を $\vec{w}_2$ とすると

$$\vec{w}_2 = (\vec{q}_3, \vec{p}_1)\vec{p}_1 + (\vec{q}_3, \vec{p}_2)\vec{p}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となります．ここで V_0 に垂直な V のベクトル $\vec{q}_3 - \vec{w}_2$ を大きさ 1 にして

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{||\vec{q}_3 - \vec{w}_2||}(\vec{q}_3 - \vec{w}_2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は V の正規直交基底となります．

VIII $\vec{q}_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とします。

$$V := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{v}, \vec{q}_1) = 0\}$$

と 2 次元の部分空間を定めます。このとき $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ の V への正射影 $P\vec{x}$ は

$$P\vec{x} \in V, \quad \vec{x} - P\vec{x} \perp \vec{q}_1$$

で定まります。

(1) P を行列で表しましょう。</dd>

(2) V に関する鏡映

$$Q\vec{x} = \vec{x} + 2(P\vec{x} - \vec{x})$$

で定まる Q を行列で表しましょう。

解答 (1)

$$\begin{aligned} P\vec{v} &= (\vec{q}_1, \vec{v})\vec{q}_1 = \vec{q}_1{}^t\vec{q}_1\vec{v} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ 1)\,\vec{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\vec{v} \end{aligned}$$

から $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

(2)

$$P = 2P - I = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

IX 3 次の直交群

$$O(3) := \{P \in M_3(\mathbf{R});\ {}^tPP = P^tP = I_3\}$$

に対して以下を示しましょう.

(1) $P_1, P_2 \in O(3)$ ならば $P_1P_2 \in O(3)$ を示しましょう.

(2) $P \in O(3)$ ならば ${}^tP \in O(3)$ を示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned} {}^t(P_1P_1)\,P_1P_1 &= {}^tP_2{}^tP_1P_1P_2 = {}^tP_1I_3P_1P_2 \\ &= {}^tP_2P_2 = I_3 \end{aligned}$$

から $P_1P_2 \in O(3)$ が分かります.

別解 $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$(P_1P_2\vec{v}, P_1P_2\vec{w}) = (P_2\vec{v}, P_2\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$

から $P_1P_2 \in O(3)$ が分かります.

(2)

$${}^t\left({}^tP\right){}^tP = P^tP = I_3$$

から ${}^tP \in O(3)$ が分かります.