経済数学入門第 2 講義 04/19 演習問題解答

II 次の行列の積を計算しましょう．

(1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(7)** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(10)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解答

(1)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda y \\ y \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x+y \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \lambda\vec{a} + \vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda\vec{a}\ \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b}\ \vec{a})$$

II $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします．以下を計算しましょう。

(1) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(2)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, **(3)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(4)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(5)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(6) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(7)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, **(8)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(9) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **(10)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(11) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(12)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

解答

(1)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{a}$$

(2)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{b}$$

(3)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{a}$$

(4)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{b}$$

(5)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{c}$$

(6)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} & 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$$

(7)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b} & 1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{b} & \vec{a}\end{pmatrix}$$

(8)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

(9)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = (\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a})$$

(10)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (\lambda\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

(11)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{c})$$

(12)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \lambda\vec{c})$$

III 次の曲面の P_0 における接平面を求めましょう。

(1) $z = xy - 2x + 2y - 1$ at $\mathrm{P}_0(0, 0, -1)$

(2) $z = \frac{x}{x+y}$ at $\mathrm{P}_0(1, -2, -1)$

(3) $z = x^2 - xy + 2y^2$ at $\mathrm{P}_0(2, 1, 4)$

(4) $z = \frac{y}{1+x^2}$ at $\mathrm{P}_0(0, 0, 0)$

(2) と (4) では 1 変数の微分の公式

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

を用いましょう。

解答 (1)

$$z_x = y - 2, \quad z_y = Fx + 2$$

から

$$z_x(0,0) = -2, \quad z_y(0,0) = 2$$

となります．よって $\mathrm{P}_0(0, 0, -1)$ における接平面は

$$z = -2x + 2y - 1$$

であることが分かります．

(2)

$$z_x = \frac{1\cdot(x+y) - x\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad z_y = \frac{-x}{(x+y)^2}$$

から

$$z_x(1,-2) = -2, \quad z_y(1,-2) = -1$$

となります. よって $\mathrm{P}_0(1,-2,-1)$ における接平面は

$$z=-2(x-1)-(y+2)-1$$

であることが分かります.

(3)

$$z_x=2x-y,\quad z_y=-x+4y$$

から

$$z_x(2,1)=3,\quad z_y(2,1)=2$$

となります. よって $\mathrm{P}_0(2,1,4)$ における接平面は

$$z=3(x-2)+2(y-1)+4$$

であることが分かります.

(4)

$$z_x=-\frac{y(2x)}{(1+x^2)^2}=-\frac{2xy}{(1+x^2)^2},\quad z_y=\frac{1}{1+x^2}$$

から

$$z_x(0,0)=0,\quad z_y(0,0)=1$$

となります. よって $\mathrm{P}_0(0,0,0)$ における接平面は

$$z=y$$

であることが分かります.

IV クラメールの公式を用いて

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x-y+z &= -1 \end{cases}$$

を満たす (x,y,z) に対して x,y を z で表しましょう。

解答

$$\begin{cases} x+y &= z+1 \\ 2x-y &= -z-1 \end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて x,y について解くと

$$x=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}\cdot\begin{vmatrix}z+1 & 1\\ -z-1 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot 0$$

$$y=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}\cdot\begin{vmatrix}1 & z+1\\ 2 & -z-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}(-3z-3)=z+1$$

V 資本 K, 労働力 L の投入に対する生産関数

$$Q=F(K,L)=9K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

を考えます.

(1) $K=216$ and $L=10^3$ に対する生産量 Q を求めましょう.

(2) $(K,L)=(216,10^3)$ のときの資本の限界生産物 MPK と労働の限界生産物 MPL を求めて, $F(216,998)$ と $F(217.5,10^3)$ の近似値を求めましょう.

解答 計算のために $216=6^3$ に注意しましょう. このとき

$$Q=F(216,10^3)=9\times\left(6^3\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(10^3\right)^{\frac{2}{3}}=9\times 6\times 10^2=5400$$

であることが分かります. 次に MPK と MPL を以下のように求めます.

$$F_K(K,L)=3K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}},\quad F_L(K,L)=6K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

従って $K=216=6^3$, $L=10^3$ のとき

$$
\begin{aligned}
MPK = F_K(216,10^3) &= 3\left(6^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(10^3\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= 3\times\frac{1}{36}\times 10^2 = \frac{1}{12}\times 10^2 = 8.33\ldots \\
MPL = F_L(216,10^3) &= 6\times\left(6^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(10^3\right)^{-\frac{1}{3}} \\
&= 6\times 6\times 10^{-1} = 3.6
\end{aligned}
$$

以上から $F_L(216,10^3)$ を用いて $F(216,998)=F(216,10^3-2)$ の近似値を

$$
\begin{aligned}
F(216,10^3+2) &\approx F(216,10^3)+F_L(216,10^3)\cdot(-2) \\
&= 5400+3.6\times(-2) = 5392.8
\end{aligned}
$$

と求めます．さらに $F_K(216,10^3)$ を用いて $F(217.5,10^3)=F(216+1.5,10^3)$ の近似値を

$$
\begin{aligned}
F(216+1.5,10^3) &\approx F(216,10^3)+F_K(216,10^3)\cdot 1.5 \\
&= 5400+\frac{1}{12}\times 10^2\times 1.5 = 5412.5
\end{aligned}
$$

と求めます．

VI 次の 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めましょう．
(1) A$(0,0,0)$, B$(1,2,3)$, C$(4,5,6)$
(2) A$(2,0,0)$, B$(0,3,0)$, C$(0,0,4)$
(3) A$(1,2,3)$, B$(-1,-1,0)$, C$(2,-3,5)$

解答以下では

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}$$

に対して

$$\vec{p}\times\vec{q}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}p_2 & q_2\\p_3 & q_3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}p_1 & q_1\\p_3 & q_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}p_1 & q_1\\p_2 & q_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

と $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の外積を定めると

$$(\vec{p},\vec{p}\times\vec{q})=(\vec{q},\vec{p}\times\vec{q})=0$$

が成立することを用いています．これは講義の中で説明します．

(1)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ であるので，求める平面の方程式は

$$x-2y+z=0$$

であることが分かります．

(2)

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=0$$

は平面を表して，与えられた 3 点を通るので，これが求める方程式となります．

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix} -17 \\ 1 \\ 11 \end{smallmatrix}\right)$ であることが分かります．これから求める平面の方程式は

$$-17(x-1+(y-2))+11(z-3)=0$$

となります．

VII Cobb-Douglas 型生産関数

$$Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

に対して $F(10^4+100, 625+(-15))$ の近似値を $K = 10^4$, $L = 625$ における MPK,MPL を用いて求めましょう．電卓でも計算してみましょう．

解答

$$F_K(K, L) = 3K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}, \quad F_L(K, L) = K^{\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}$$

から $K = 10^4$, $L = 625 = 5^4$ において MPK, MPL が

$$\begin{aligned} MPK &= F_K(10^4, 5^4) = 3 \times \left(10^4\right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= 3 \times 10^{-1} \times 5 = 1.5 \\ MPL &= F_L(10^4, 5^4) = \left(10^4\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(5^4\right)^{-\frac{3}{4}} \\ &= 10^3 \times 5^{-3} = 8 \end{aligned}$$

と計算されます．さらに

$$F(10^4, 5^4) = 4 \times \left(10^4\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(5^4\right)^{\frac{1}{4}} = 4 \times 10^3 \times 5 = 2.0 \times 10^4$$

も計算できます．以上の準備の下で $F(10^4+100, 5^4+(-15))$ の近似値を求めると

$$\begin{aligned} F(10^4+100, 5^4+(-15)) &\approx F(10^4, 5^4) + F_K(10^4, 5^4) \times 100 + F_L(10^4, 5^4) \times (-15) \\ &= 2.0 \times 10^4 + 1.5 \times 100 + 8 \times (-15) \\ &= 20,030 \end{aligned}$$

となります．Google Chrome で計算してみると

$$F(10^4+100, 5^4+(-15)) = 20,027.81$$

となります．