SL03 演習問題解答

I 以下の曲線 $g(x,y)=0$ の P_0 における接線を求めましょう.
(1) $g(x,y)=x^2+4y^2-1=0$ at $P_0(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})$
(2) $g(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-1=0$ at $P_0(1,1)$
(3) $g(x,y)=x^2-xy+y^2-1=0$ at $P_0(0,1)$

解答 (1) $g_x=2x,\ g_y=8y$ から

$$g_x(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})=\sqrt{2},\quad g_y(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})=2\sqrt{2}$$

と計算されます. 従って $\mathrm{P}_0(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ における接線は

$$\sqrt{2}(x-\frac{1}{\sqrt{2}})+2\sqrt{2}(y-\frac{1}{2\sqrt{2}})=0$$

となります.
(2) $g_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ g_y=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$ から

$$g_x(1,1)=\frac{1}{3},\quad g_y(1,1)=\frac{1}{3}$$

となりますから, $\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$\frac{1}{3}(x-1)+\frac{1}{3}(y-1)=0$$

となります.
(3) $g_x=2x-y,\ g_y=-x+2y$ から

$$g_x(0,1)=-1,\quad g_y(0,1)=2$$

となりますから, $\mathrm{P}_0(1,1)$ における接線は

$$-1\cdot(x-0)+2(y-1)=0\quad \text{すなわち}\quad -x+2(y-1)=0$$

となります.

II 次の行列の逆行列を求めましょう.
(1) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ **(2)** $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ **(3)** $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$
(4) $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(5)** $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ **(6)** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ **(7)** $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

解答

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ から

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

となります.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$ から

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

(7) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1$ から

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

III 以下の計算をしましょう．

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

解答 (i)

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

IV 以下の等式を満たす 2 次正方行列 X を求めましょう．

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ **(ii)** $X\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

解答 (i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1+4=5\neq 0$ から $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ が正則であることが分かる．両辺に $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を左から掛けて

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

を得るが,

$$(\text{左辺})=I_2X=X$$

となるので

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

となる．

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2 \neq 0$ から $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ が正則であることが分かる．両辺に $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ を右から掛けて

$$X \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

を得るが，

$$(\text{左辺}) = XI_2 = X$$

となるので

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -17 & 11 \end{pmatrix}$$

となります．

V 2 次正方行列 A, B が正則であるとします．このとき AB と A^{-1} が正則であることを示しましょう．

解答

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_2A^{-1} = AA^{-1} = I_2$$
$$B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_2B = B^{-1}B = I_2$$

から AB は正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

であることが分かります．

他方

$$A^{-1}A = I_2, \quad AA^{-1} = I_2$$

から A^{-1} は正則で

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

であることが分かります．

VI 2 次正方行列 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$ が

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^2)$$

を満たすとします．このとき $A = O_2$ となることを示しましょう．

Hint: 標準単位ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\vec{x}$ として考えましょう．

解答

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\vec{a}_1,\quad A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\vec{a}_2$$

から

$$A=(\vec{0}\ \vec{0})=O_2$$

が従います.

VII $g(x,y)=x^2-y^2-1=0$ をその上の点 $(2,\sqrt{3})$ の近傍で解いて

$$\varphi(x)=\sqrt{x^2-1} \tag{2}$$

とします．$\varphi'(2)$ を g の 1 階の偏微分係数を用いて求めましょう.

解答

$$g_x=2x,\ g_y=-2y$$

と計算します．このとき

$$\varphi'(2)=-\frac{g_x(2,\sqrt{3})}{g_y(2,\sqrt{3})}=-\frac{4}{(-2\sqrt{3})}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

と計算されます.

VIII ある工場が非熟練労働 x 時間，熟練労働 y 時間を使ってある生産物を

$$Q=F(x,y)=60x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

単位生産していて，現在 $x=64$, $y=27$ となっているとします.
(1) 現在の生産量を求めましょう.
(2) どの方向に (x,y) を変化させれば Q が最も増加するでしょうか？
(3) 熟練労働を 1.5 時間増加させるが，生産レベルを保つとします．非熟練労働はどのように変化させることになるか近似値を求めましょう.

解答 **(1)** $64=4^3, 27=3^3$ に注意します．すると

$$F(64,27)=60\times\left(4^3\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}=60\times 4^2\times 3=2,880$$

と現在の生産量が求められます.
(2)

$$F_x=60\times\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\times y^{\frac{1}{3}}=40\times x^{-\frac{1}{3}}\times y^{\frac{1}{3}}$$
$$F_x=60\times x^{\frac{2}{3}}\times\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}=20\times x^{\frac{2}{3}}\times y^{-\frac{2}{3}}$$

から

$$
\begin{aligned}
F_x(64,27) &= 40 \times \left(4^3\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 40 \times \frac{1}{4} \times 3 = 30 \\
F_y(64,27) &= 20 \times \left(4^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3^3\right)^{-\frac{2}{3}} = 20 \times 4^2 \times 3^{-2} = \frac{320}{9}
\end{aligned}
$$

と計算されます．これから

$$
\nabla(F)(64,27) = \begin{pmatrix} 30 \\ \frac{320}{9} \end{pmatrix}
$$

の方向が Q を最も増加させる方向です.

(3) 等量曲線

$$
F(x,y) = F(64,27)
$$

の $(x,y) = (64,27)$ における接線

$$
30(x-64) + \frac{320}{9}(y-27) = 0
$$

上で近似的に考えます．熟練労働の時間を $y = 27 + 1.5$ とすると

$$
\begin{aligned}
x - 64 &= -\frac{320}{9} \times \frac{1}{30} \times 1.5 \\
&= -\frac{16}{9} = -1.77\ldots
\end{aligned}
$$

となりますから非熟練労働の時間を $1.77\ldots$ 時間減らすことになります.

IX 曲線 $g(x,y) := x^2 - xy + y^2 - 1$ を $(1,1)$ の近傍で解いた

$$
y = \varphi(x) = \frac{x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}
$$

に対して $\varphi'(1)$ を g の 1 階の偏微分係数を用いて求めましょう.

解答

$$
g_x = 2x - y, \quad g_y = -x + 2y
$$

となります．これから

$$
\varphi'(1) = -\frac{g_x(1,1)}{g_y(1,1)} = -\frac{2-1}{-1+2} = -1
$$

であることが分かります.