SL03 2021 年 5 月 03 日演習問題

I 次の行列の積を求めましょう．

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$

解答

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1c_2 + c_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ c_1a_2 + b_1c_2 & b_1b_2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}$

II A, P は 2 次正方行列とします．P が正則であるとき，帰納法を用いて

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

であることを示しましょう．

解答

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

とすると

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^{n+1} &= (P^{-1}AP)^n(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A^nP \cdot P^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^n(PP^{-1})AP \\ &= P^{-1}A^nI_2AP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P\end{aligned}$$

から帰納法によりすべての自然数 n に対して

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

が成立する．

III 以下のベクトルの外積を計算しましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\7\\-3\end{pmatrix}$$

IV (1) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ に対して A^2 を求めましょう．
(2) (1) を用いて A^{-1} を求めましょう．

解答 (1)

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & 0\\ 0 & \sin^2\theta+\cos\theta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

(2) 正則行列の定義から $A^{-1}=A$ として A が正則であることが分かります．

V 以下の $\vec{a},\vec{b}$ に対して $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ を求めましょう．
(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{a}$$

(2)

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a}$$

(3)

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = \frac{2}{2}\vec{a} = \vec{a}$$

VI

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a} - t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう.

解答

$$||\vec{a}||^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 + (-2) + 3 + 4 = 6$$
$$||\vec{b}||^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

から

$$\begin{aligned} ||\vec{a} - t\vec{b}||^2 &= ||\vec{a}||^2 - 2t(\vec{a}, \vec{b}) + ||\vec{b}||^2 \\ &= 4t^2 - 12t + 30 = 4\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 21 \end{aligned}$$

となります. 従って $t = \frac{3}{2}$ のとき最小値 21 を取ります.

VII 次の 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めましょう.

(1) A$(0, 0, 0)$, B$(1, 2, 3)$, C$(4, 5, 6)$

(2) A$(2, 0, 0)$, B$(0, 3, 0)$, C$(0, 0, 4)$

(3) A$(1, 2, 3)$, B$(-1, -1, 0)$, C$(2, -3, 5)$

解答以下では

$$\vec{p} = \left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{smallmatrix}\right), \quad \vec{q} = \left(\begin{smallmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{smallmatrix}\right)$$

に対して

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} \left|\begin{smallmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{smallmatrix}\right| \\ -\left|\begin{smallmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{smallmatrix}\right| \\ \left|\begin{smallmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{smallmatrix}\right| \end{pmatrix}$$

と $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の外積を定めると

$$(\vec{p}, \vec{p} \times \vec{q}) = (\vec{q}, \vec{p} \times \vec{q}) = 0$$

が成立することを用いています．これは講義の中で説明します．

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ であるので，求める平面の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

であることが分かります．

(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 0$$

は平面を表して，与えられた 3 点を通るので，これが求める方程式となります．

(3)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix} -21 \\ 1 \\ 13 \end{smallmatrix}\right)$ であることが分かります．これから求める平面の方程式は

$$-21(x-1) + (y-2) + 13(z-3) = 0$$

となります．

VIII $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{a} \neq \vec{0}$ を満たすとします．$c\vec{a} = \vec{0}$ ならば $c = 0$ となることを示しましょう．

解答 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ですから $\vec{a} = {}^t(a_1 \ \ldots \ a_i \ \vec{d}ots \ a_n)$ とすると，ある i に関して第 i 成分について $a_i \neq 0$ が成立します．このとき

$$c\vec{a} = {}^t(ca_1 \ \ldots \ ca_i \ \ldots \ ca_n) = \vec{0}$$

となりますから $ca_i = 0$ となります．$a_i \neq 0$ ですから $c = 0$ であることが従います．

別解 $||c\vec{a}|| = |c| \cdot ||\vec{a}|| = 0$ において $||\vec{a}|| > 0$ が成立しますから，$c = 0$ となります．

IX $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{a}, \vec{c})$$

が成立することを示しましょう．(「線型代数学」教科書 13 ページ、演習 1.17)

解答

$$
\begin{aligned}
||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 &= ||\vec{a}+\vec{b}+||^2 + 2(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) + ||\vec{c}||^2 \\
&= ||\vec{a}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + ||\vec{b}||^2 + 2(\vec{a},\vec{c}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + ||\vec{c}||^2 \\
&= ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{a},\vec{c})
\end{aligned}
$$

X $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a},\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう．（「線型代数学」教科書 13 ページ、演習 1.19）

解答　$\vec{x} = \vec{a}$ とすると

$$||\vec{a}||^2 = (\vec{a},\vec{a}) = 0$$

から $\vec{a} = \vec{0}$ が従います.

注意 $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

が成立します.

XI $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします.

(1)

$$||x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2||^2 = x^2 + y^2$$

$$||x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 + z\vec{f}_3||^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

を示しましょう.

(2)$\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{g} - x\vec{f}_1 - y\vec{f}_2||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g},\vec{f}_1) - 2y(\vec{g},\vec{f}_2)$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned}||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2 &= ||x\vec{f_1}||^2+2(x\vec{f_1},y\vec{f_2})+||y\vec{f_2}||^2\\ &= x^2||\vec{f_1}||^2+2xy(\vec{f_1},\vec{f_2})+y^2||\vec{f_2}||^2\\ &= x^2\cdot 1+2xy\cdot 0+y^2\cdot 1 = x^2+y^2\\ ||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}+z\vec{f_3}||^2 &= ||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2+2(x\vec{f_1}+y\vec{f_2},z\vec{f_3})+||z\vec{f_3}||^2\\ &= x^2+y^2+2xz(\vec{f_1},\vec{f_3})+2yz(\vec{f_2},\vec{f_3})+z^2||\vec{f_3}||^2\\ &= x^2+y^2+2xz\cdot 0+2yz\cdot 0+z^2\cdot 1 = x^2+y^2+z^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}||\vec{g}-x\vec{f_1}-y\vec{f_2}||^2 &= ||\vec{g}||^2-2(x\vec{f_1}+y\vec{f_2},\vec{g})+||x\vec{f_1}+y\vec{f_2}||^2\\ &= ||\vec{g}||^2-2x(\vec{f_1}+y\vec{f_2},\vec{g})-2y(\vec{f_2},\vec{g})+x^2+y^2\\ &= ||\vec{g}||^2+x^2+y^2-2x(\vec{g},\vec{f_1})-2y(\vec{g},\vec{f_2})\end{aligned}$$

XII $\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ とします。$\vec{w}$ を $\vec{v}\in\mathbf{R}^2$ の $\vec{a}$ 方向の直交射影とします。このとき

$$\vec{q}=\vec{v}+2(\vec{w}-\vec{v})=2\vec{w}-\vec{v}$$

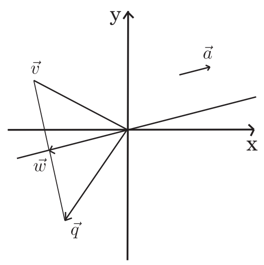
に対して

$$\vec{q}=Q\vec{v}$$

を満たす行列 Q を求めましょう。さらに

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

のとき Q を求めましょう。



解答

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

とすると

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{v})}{||\vec{a}||^2}=\frac{\alpha x+\beta y}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2x+\alpha\beta y\\ \alpha\beta x+\beta^2 y\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

から

$$\vec{q}=2\vec{w}-\vec{v}=\left(\frac{2}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \beta^2\end{pmatrix}-I_2\right)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2-\beta^2 & 2\alpha\beta\\ 2\alpha\beta & -\alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

となりますから

$$Q=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\alpha^2-\beta^2 & 2\alpha\beta\\ 2\alpha\beta & -\alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}$$

となります．特に $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ のとき

$$Q = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

となります．

XIII

(1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}$ が作る平行四辺形の面積は

$$||\vec{a} \times \vec{b}||$$

であることを示しましょう．また

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

であることを示しましょう．

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が作る平行四面体の体積は

$$|(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|$$

であることを示しましょう．

解答 (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ なす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

から

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta &= \frac{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2} \\
&= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3)^2 (b_1^2 + b_2^3 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2} \\
&= \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2} \\
&= \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2}
\end{aligned}$$

となります．これから

$$\sin\theta = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

であることが分かり，平行四辺形の面積 S は

$$S = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin\theta = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

であることが従います．

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}) &= a_1\left|\begin{smallmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{smallmatrix}\right| - a_2\left|\begin{smallmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{smallmatrix}\right| + a_3\left|\begin{smallmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{smallmatrix}\right|\\ &= a_1(a_2b_3-a_3b_2)-a_2(a_1b_3-a_3b_1)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)\\ &= b_1(a_2a_3-a_2a_3)+b_2(-a_1a_3+a_1a_3)+b_3(a_1a_2-a_1a_2)=0\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}) &= b_1\left|\begin{smallmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{smallmatrix}\right| - b_2\left|\begin{smallmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{smallmatrix}\right| + b_3\left|\begin{smallmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{smallmatrix}\right|\\ &= b_1(a_2b_3-a_3b_2)-b_2(a_1b_3-a_3b_1)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)\\ &= a_1(-b_2b_3+b_2b_3)+a_2(b_1b_2-b_1b_3)+a_3(-b_1b_2+b_1b_2)=0\end{aligned}$$

注意 3 次行列式を用いると

$$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{a})=(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b})=0$$

であることは簡単に導けます．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が作る平行四辺形を底面として考えます．この時 $\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ の間の角を φ とすると，高さ h は

$$h=\|\vec{c}\|\cdot|\cos\varphi|=\|\vec{c}\|\cdot\left|\frac{(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b})}{\|\vec{c}\|\cdot\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\right|=\left|\frac{(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b})}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\right|$$

と求まります．従って平行 6 面体の体積 V は

$$V=S\cdot h=\left|(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b})\right|$$

となります．3 次行列式を用いると

$$\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=(\vec{c},\vec{a}\times\vec{a})$$

が成立しますから

$$V=\left|\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\right|$$

とも表せます．

XIV $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^3$ とします．このとき

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

とします．このとき

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\begin{vmatrix}b_2 & a_2\\b_3 & a_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}b_1 & a_1\\b_3 & a_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}b_1 & a_1\\b_2 & a_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

さらに $\vec{a}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{a}$ から $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ が従います.

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
+ \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}
\end{aligned}
$$