第 5 講義 05 月 10 日　演習問題解答

I $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化しましょう.

解答 A の固有多項式は

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2) - 6 \\ &= \lambda^2 - 3 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4)\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -1, 4$ であることが分かります.

次に固有ベクトルを求めます.

<u>$\lambda = -1$ のとき</u>

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (-I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow x + y = 0\end{aligned}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルであることが分かります.

<u>$\lambda = 4$ のとき</u>

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (4I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 3x - 2y = 0\end{aligned}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルであることが分かります.

特に $\vec{p}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{p}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ を用いて $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とすると一般論から P は正則となり,

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-\vec{p}_1\ 4\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) = P\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$$

から A は

$$P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$$

と対角化されます.

II
次の $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$L=\{x\vec{a}+y\vec{b};\ x,y\in\mathbf{R}\}$$

を考えます．条件

$$||\vec{p}||=||\vec{q}||=1,\ (\vec{p},\vec{q})=0$$

を満たす $\vec{p},\vec{q}\in L$ を求めましょう．

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **(4)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

解答　**(1)** $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}=\frac{2}{3}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．

(2) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}=\frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

(3) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = -\frac{1}{4}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

(4) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = \frac{2}{4}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

III（II の続き）XII の $\vec{p}, \vec{q}$ を用いて

$$||\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$$

を最小にする $x, y \in \mathbf{R}$ を求めましょう．

(1) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(4)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解説　$\vec{p},\vec{q}$ と $\vec{a},\vec{b}$ の間に関係

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}$$
$$\vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\left(\vec{b}-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}\right)$$

があることに注意しましょう．従って

$$(\vec{p}\ \vec{q})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}\frac{1}{||\vec{a}||} & -\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\cdot\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\\ 0 & \frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\end{pmatrix}$$

が成立します．この等式の右辺に現れる行列を S とすると S は正則となります．

$$\xi\vec{p}+\eta\vec{q}=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})S\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$
$$=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

から

$$S\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\quad 従って\quad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=S^{-1}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

が成立します．以上から任意の $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$ に対して一意的に $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$ が存在して

$$x\vec{a}+y\vec{b}=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}$$

が成立します．ここで $\vec{c}-\vec{v}||^2$ を最小とする $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\in L$ を求めます．

$$\begin{aligned}||\vec{c}-x\vec{a}-y\vec{b}||^2&=||\vec{c}-\xi\vec{p}-\eta\vec{q}||^2\\&=||\vec{c}||^2+\xi^2||\vec{p}||^2+\eta^2||\vec{q}||^2-2\xi(\vec{c},\vec{p})-2\eta(\vec{c},\vec{q}\\&=||\vec{c}||^2+\xi^2-2\xi(\vec{c},\vec{p})++\eta^2||\vec{q}||^2-2\eta(\vec{c},\vec{q}\\&=(\xi-(\vec{c},\vec{p}))^2+(\eta-(\vec{c},\vec{q}))^2+||\vec{c}||^2-(\vec{c},\vec{p})^2-(\vec{c},\vec{q})^2\end{aligned}$$

から

$$\xi=(\vec{c},\vec{p}),\quad \eta=(\vec{c},\vec{q})$$

のとき $||\vec{x}-\xi\vec{p}-\eta\vec{q}||^2$ は最小となります．ここここで求めた

$$\vec{v}=\vec{v}_0=(\vec{c},\vec{p})\vec{p}+(\vec{c},\vec{q})\vec{q}$$

が

$$\vec{v}_0\in L,\quad (\vec{c}-\vec{v}_0)\perp L$$

を満たす $\vec{c}$ の L への直交射影となります．

解答

(1)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$(\vec{c},\vec{p}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (\vec{c},\vec{q}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}\right) = -\frac{5}{\sqrt{42}}$$

となります．このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{42}}\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{2}{14}\\ 1 & 1 & \frac{3}{14}\\ 1 & -1 & \frac{13}{14}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{2}{14}\\ 0 & -1 & \frac{5}{14}\\ 0 & -3 & \frac{15}{14}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{2}{14}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{14}\\ 0 & -3 & \frac{15}{14}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{8}{14}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{14}\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$x = \frac{4}{7}, \quad y = -\frac{5}{14}$$

であることが分かります．

注意 $S = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{42}}\cdot\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{42}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{5}{\sqrt{42}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\ -\frac{5}{14}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます．

(2)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$(\vec{c},\vec{p}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\vec{c},\vec{q}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

となります．このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 =& x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q}\\ =& -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{34}}\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\6\\13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 2 & \frac{6}{17} \\ -1 & 1 & \frac{13}{17} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 2 & \frac{6}{17} \\ 0 & 3 & \frac{9}{17} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 1 & \frac{3}{17} \\ 0 & 3 & \frac{9}{17} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{0}17 \\ 0 & 1 & \frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$x = -\frac{20}{17}, \quad y = \frac{3}{17}$$

であることが分かります.

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{34}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{34}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{17} \\ \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

(3)

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$(\vec{c}, \vec{p}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}, \quad (\vec{c}, \vec{q}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{5}{\sqrt{44}}$$

となります．このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{44}}\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります．この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{9}{11} \\ 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{11} \\ -1 & 1 & \frac{1}{11} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & -1 & \frac{5}{11} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$x = \frac{4}{11}, \quad y = \frac{5}{11}$$

であることが分かります.

注意 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{4}{\sqrt{44}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{44}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{44}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{\sqrt{44}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

(4)

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$(\vec{c},\vec{p}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (\vec{c},\vec{q}) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{3}{\sqrt{20}}$$

のとき最小値をとります．このとき求める直交射影は

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{c},\vec{p})\vec{p} + (\vec{c},\vec{q})\vec{q}\\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{20}}\frac{1}{\sqrt{(20)}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\\7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．この式を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -\frac{1}{10}\\ 1 & 0 & -\frac{4}{10}\\ 1 & 2 & \frac{2}{10}\\ -1 & 1 & \frac{7}{10}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & \frac{3}{10}\\ 1 & 0 & -\frac{4}{10}\\ 0 & 2 & \frac{6}{10}\\ 0 & 1 & \frac{3}{10}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -\frac{4}{10}\\ 0 & 1 & \frac{3}{10}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$x = -\frac{4}{10}, \quad y = \frac{3}{10}$$

であることが分かります.

注意 $S = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{20}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{20}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{\sqrt{20}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{10}\\ \frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

IV $R \in M_2(\mathbf{R})$ が回転行列ならば $R^{-1} = {}^tR$ であることを示しましょう.

解答 $R = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とします．このとき $|R| = \cos^2\theta + \sin\theta^2\theta = 1 \neq 0$ から

$$R^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = {}^tR$$

であることが分かります.

V

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ であることを示しましょう.

(2) $||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$ を最小にする x, y を求めましょう.

解答 (1)

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 2 - 1 - 1 = 0$$

(2)

$$\begin{aligned}
||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2 &= ||\vec{g}||^2 - 2(\vec{g}, x\vec{a} + y\vec{b}) + ||x\vec{a} + y\vec{b}||^2 \\
&= ||\vec{g}||^2 - 2x(\vec{g}, \vec{a}) - 2y(\vec{g}, \vec{b}) + ||x\vec{a}||^2 + 2(x\vec{a}, y\vec{b}) + ||y\vec{b}||^2 \\
&= ||\vec{g}||^2 - 2x(\vec{g}, \vec{a}) - 2y(\vec{g}, \vec{b}) + x^2||\vec{a}||^2 + 2xy(\vec{a}, \vec{b}) + y^2||\vec{b}||^2 \\
&= 1^2 - 2x \cdot 1 - 2y(-1) + x^2 \cdot 3 + 2xy \cdot 0 + y^2 \cdot 6 \\
&= 3x^2 - 2x + 6y^2 + 2y + 1 \\
&= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\
&= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

から $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{6}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ を取ります.

VI 次の行列の積を計算しましょう.（計算の意味を考えてみましょう.）

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

解答

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & -\cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha)\cos\alpha + \sin(\beta-\alpha)\sin\alpha & -\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha + \sin(\beta-\alpha)\cos\alpha \\ \sin(\beta-\alpha)\cos\alpha - \cos(\beta-\alpha)\sin\alpha & -\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha - \cos(\beta-\alpha)\cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta-2\alpha) & \sin(\beta-2\alpha) \\ \sin(\beta-2\alpha) & -\cos(\beta-2\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$