

第7講義 05月24日 演習問題解答

I f は \mathbf{R} 上の微分可能な関数とします。

(1) $F(x, y) := f(x^2 + y^2)$ と \mathbf{R}^2 上の関数を定義します。 $\nabla(F)(x, y)$ を求めましょう。

(2) $y \neq 0$ のとき $G(x, y) := f(\frac{x}{y})$ を定義します。 $\nabla(G)(x, y)$ を求めましょう。

解答 (1)

$$\begin{aligned} F_x &= f'(x^2 + y^2) \cdot 2x \\ F_y &= f'(x^2 + y^2) \cdot 2y \end{aligned}$$

から

$$\nabla(F)(x, y) = 2f'(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} G_x &= f'(\frac{x}{y}) \cdot \frac{1}{y} \\ G_y &= f'(\frac{x}{y}) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \end{aligned}$$

から

$$\nabla(G)(x, y) = f'(\frac{x}{y}) \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2} f'(\frac{x}{y}) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

II (1) $f(x, y, z) = e^x + e^{2y} + e^{3z}$ とします。 $\nabla(f)(0, 0, 0)$ を求めましょう。 </dd>

(2) $g(x, y, z) = e^{x+2y+3z}$ とします。 $\nabla(g)(0, 0, 0)$ を求めましょう。

解答 (1)

$$\begin{aligned} f_x &= e^x \\ f_y &= 2e^{2y} \\ f_z &= 3e^{3z} \end{aligned}$$

から

$$\nabla(f)(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} g_x &= e^{x+2y+3z} \\ g_y &= 2e^{x+2y+3z} \\ g_z &= 3e^{x+2y+3z} \end{aligned}$$

から

$$\nabla(g)(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

III f の P_0 における \vec{v} 方向の微分 $D_{\vec{v}}(f)(P_0)$ を求めましょう。

(1) $f(x, y) = x + 2y - 1$ at $P_0(1, 2)$ in the direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^3$ at $P_0(1, 1)$ in the direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$f_x = 1, \quad f_y = 2$$

から

$$D_{\vec{v}}(f)(P_0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

(2)

$$f_x = 2x + y, \quad f_y = x - 3y^2$$

から

$$f_x(1, 1) = 3, \quad f_y(1, 1) = -2$$

となるので

$$D_{\vec{v}}(f)(P_0) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = -3$$

IV \mathbf{R}^2 の開集合 U 上で定義された関数 $f(x, y)$ が与えられているとします。他方 U の中に C^2 級の曲線 $(x(t), y(t))$ が与えられているとします。このとき

$$F(t) := f(x(t), y(t))$$

を定義します。このとき

$$F''(t) := \left(H(f)(x(t), y(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right) + \left(\nabla(f)(x(t), y(t)), \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \right)$$

が成立することを示しましょう。

解答

$$F'(t) = f_x((x(t), y(t))) \cdot x'(t) + f_y((x(t), y(t))) \cdot y'(t)$$

をもう一度 t で微分すると

$$\begin{aligned} F''(t) &= (f_{xx}((x(t), y(t))) \cdot x'(t) + f_{xy}((x(t), y(t))) \cdot y'(t)) \cdot x'(t) + f_x((x(t), y(t))) \cdot x''(t) \\ &\quad + (f_{yx}((x(t), y(t))) \cdot x'(t) + f_{yy}((x(t), y(t))) \cdot y'(t)) \cdot y'(t) + f_y((x(t), y(t))) \cdot y''(t) \\ &= f_{xx}((x(t), y(t))) \cdot (x'(t))^2 + 2f_{xy}((x(t), y(t))) \cdot x'(t)y'(t) + f_{yy}((x(t), y(t))) \cdot (y'(t))^2 \\ &\quad + f_x((x(t), y(t))) \cdot x''(t) + f_y((x(t), y(t))) \cdot y''(t) \\ &= \left(\begin{pmatrix} f_{xx}((x(t), y(t))) & f_{xy}((x(t), y(t))) \\ f_{yx}((x(t), y(t))) & f_{yy}((x(t), y(t))) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} f_x((x(t), y(t))) \\ f_y((x(t), y(t))) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(H(f)(x(t), y(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right) + \left(\nabla(f)(x(t), y(t)), \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

V 第 1 象限

$$\mathbf{R}_{++}^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x, y > 0\}$$

の上で定義されている関数は

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) \quad (t > 0, (x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2)$$

が成立するとき λ 斉次であるといいます。

(1) この状況で、さらに f が \mathbf{R}_{++}^2 で C^1 級ならば

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = \lambda f(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2) \tag{EQ}$$

が成立することを示しましょう。

(2) 逆に \mathbf{R}^2 上で C^1 級の f が (EQ) を満たすならば f は λ 次斉次であることを示しましょう。

解答 (1)

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) \quad (t > 0, (x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2)$$

の両辺を t で微分すると

$$f_x(tx, ty) \cdot x + f_y(tx, ty) \cdot y = \lambda t^{\lambda-1} f(x, y) \quad (t > 0, (x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2)$$

となります。これに $t = 1$ を代入すると

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = \lambda f(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2) \quad (\text{EQ})$$

となります。

(2)

$$\begin{aligned} (t^{-\lambda} f(tx, ty))' &= -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx, ty) + t^{-\lambda} \cdot (f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y) \\ &= -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx, ty) + t^{-\lambda} (t^{-1} \lambda f(tx, ty)) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

から t に関して $t^{-\lambda} f(tx, ty)$ は一定となります。従って

$$t^{-\lambda} f(tx, ty) = f(x, y) \quad \text{すなわち} \quad f'(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$$

であることが分かります。