

$I, p, q, I > 0$  とします. 効用関数

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で最大化することを考えます.

(1) 停留点を求めて

$$x(p, q, I) = \frac{I}{2p}, \quad y(p, q, I) = \frac{I}{2q}, \quad \lambda = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{pqI}}$$

であることを示しましょう.

(2) 間接効用関数

$$v(p, q, I) = u(x(p, q, I), y(p, q, I))$$

に対して

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p, q, I)$$

が成立することを示しましょう.

(3) Roy の恒等式

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial I} \cdot x(p, q, I) = 0$$

が成立することを示しましょう.

解答  $(x, y)$  で極大または極小とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} - \lambda p = 0 & \dots\dots (1) \\ \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} - \lambda q = 0 & \dots\dots (2) \\ I - px - qy = 0 & \dots\dots (3) \end{cases}$$

を満たす  $\lambda \in \mathbf{R}$  が存在します. (1)  $\times x$  と (2)  $\times y$  から

$$\lambda px = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}, \quad \lambda qy = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

が分かります. (1) または (2) から  $\lambda \neq 0$  が必要ですから

$$px = qy = \frac{1}{3\lambda} x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

となります. さらに (3) を用いると

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad \text{従って} \quad x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

となります. (1), (2) から

$$\frac{1}{9} x^{-\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} - \lambda^2 pq = 0$$

となりますから

$$\lambda^2 = \frac{1}{9pq} \sqrt[3]{\frac{4pq}{I^2}} = \frac{1}{3^2} \sqrt[3]{\frac{2^2}{p^2q^2I^2}}$$

従って

$$\lambda = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{pqI}}$$

であることが分かります。(1) から  $\lambda > 0$  となることに注意しましょう。

(2)

$$\text{間接効用関数 } v(p, q, I) = \left(\frac{I}{2p}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{I}{2q}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$$

を  $I$  で偏微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{2}{3} \cdot \frac{I^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}I^{\frac{1}{3}}} = \lambda$$

となります。

**注意** これから  $\lambda(p, q, I)$  を **所得の限界効用関数** と呼びます。

(3) 間接効用関数  $v(p, q, I)$  を  $p$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}} \\ &= -\frac{I}{2p} \cdot \frac{2p}{I} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}p^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}} \\ &= -\frac{I}{2p} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}I^{\frac{1}{3}}} \\ &= -\frac{I}{2p} \cdot \lambda = -x \frac{\partial v}{\partial I} \end{aligned}$$

と Roy の恒等式が成立することが分かります。

**II**  $p, q, I > 0$  とします。効用関数

$$u(x, y) = \frac{1}{3} \log x + \frac{1}{3} \log y$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で最大化することを考えます。停留点を求めて、需要関数と所得の限界効用関数  $\lambda(p, q, I)$  を求めましょう。

**解答**  $(x, y)$  で極大または極小とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \frac{1}{x} - \lambda p &= 0 & \dots\dots (1) \\ \frac{1}{3} \frac{1}{y} - \lambda q &= 0 & \dots\dots (2) \\ I - px - qy &= 0 & \dots\dots (3) \end{cases}$$

を満たす  $\lambda \in \mathbf{R}$  が存在します。(1),(2) から

$$\begin{cases} \lambda p &= \frac{1}{3} \frac{1}{x} & \dots\dots (1)' \\ \lambda q &= \frac{1}{3} \frac{1}{y} & \dots\dots (2)' \end{cases}$$

であることが分かります. (1)'/(2)' から

$$\frac{p}{q} = \frac{y}{x} \quad \text{すなわち} \quad px = qy$$

が従います. (3) から

$$px = qy = \frac{I}{2} \quad \text{従って} \quad x = \frac{I}{2p}, \quad y = \frac{I}{2q}$$

を得ます. このとき所得の限界効用関数は

$$\lambda = \frac{1}{3p} \cdot \frac{2p}{I} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{I}$$

となります.

**注意**

$$U(x, y) := e^{u(x, y)} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

と定義すると

$$u(x, y) = C \Leftrightarrow U(x, y) = e^C$$

となります.  $U(x, y)$  が問題 I の効用関数にあたることに注意すると, 2つの効用関数の無差別曲線族が同じものであることが分かります. 需要関数が無差別曲線族にしかよらないことの例を与えてくれます.

### III 制約条件

$$x^2 + 2y^2 - 24 = 0$$

の下で

$$z = x + y$$

の停留点を求めましょう.

**解答**  $(x, y)$  で極大または極小とすると

$$\begin{cases} 1 + \lambda \cdot 2x & = & 0 & \dots\dots (1) \\ 1 + \lambda \cdot 4y & = & 0 & \dots\dots (2) \\ x^2 + 2y^2 - 24 & = & 0 & \dots\dots (3) \end{cases}$$

が成立します. (1),(2) から

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{4\lambda}$$

を得ますから, これを (3) に代入して

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 24 \quad \text{すなわち} \quad \frac{3}{8\lambda^2} = 24$$

から  $\lambda = \pm 18$  であることが分かります. これから

$$x = \mp 4, \quad y = \mp 2$$

となります. 停留点は

$$(x, y, \lambda) = (\mp 4, \mp 2, \pm \frac{1}{18})$$

IV  $p, q, I > 0$  とします. 効用関数

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で最大化することを考えます. 停留点を求めて, 需要関数と所得の限界効用関数  $\lambda(p, q, I)$  を求めましょう.

解答  $(x, y)$  で極大または極小とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - \lambda p = 0 & \dots\dots(1) \\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - \lambda q = 0 & \dots\dots(2) \\ I - px - qy = 0 & \dots\dots(3) \end{cases}$$

を満たす  $\lambda \in \mathbf{R}$  が存在します. (1),(2) から

$$\begin{cases} \lambda p = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \dots\dots(1)' \\ \lambda q = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & \dots\dots(2)' \end{cases}$$

が従います. (1)'/(2)' から

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} \quad \text{従って} \quad px = \frac{1}{2}qy$$

となります. これを (3) に代入すると

$$I - \frac{1}{2}qy - qy = I - \frac{3}{2}qy = 0$$

から

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3p}$$

と需要関数が求まります. このとき所得の限界効用関数は

$$\lambda = \frac{1}{q} \cdot \left( \frac{I}{3p} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2q^2p}}$$

となります.

V  $g(x, y) := 2x^2 + y^2 - 1 = 0$  の下で  $z = f(x, y) = x^2y$  を考えます. 停留点を求めましょう. (CT290 ページ, 演習 8.13)

解答  $f$  と  $g$  の偏導関数を求めると

$$g_x = 4x, \quad g_y = 2y, \quad f_x = 2xy, \quad f_y = x^2$$

となります.  $(x, y)$  で極大または極小であるとする

$$\begin{cases} 2xy + \lambda \cdot 4x = 0 & (i) \\ x^2 + \lambda \cdot 2y = 0 & (ii) \\ 2x^2 + y^2 - 1 = 0 & (iii) \end{cases}$$

を満たす  $\lambda \in \mathbf{R}$  が存在します。まず

$$(i) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ OR } y + 2\lambda = 0)$$

となりますから、これをもとに場合を分けて考えます。

(1)  $x = 0$  のとき (ii) は  $\lambda y = 0$  となりますが、これは

$$\lambda = 0 \text{ OR } y = 0$$

と必要十分です。ところが  $y = 0$  とすると  $(x, y) = (0, 0)$  は (iii) を満たしません。従って  $y \neq 0$  すなわち  $\lambda = 0$  であることが分かります。このとき  $x = 0$  を (iii) に代入して

$$y = \pm 1$$

となります。以上で

$$(x, y, \lambda) = (0, \pm 1, 0)$$

がこの場合の停留点であることが分かります。

(2)  $y + 2\lambda = 0$  のとき  $2\lambda = -y$  を (ii) の代入すると

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ すなわち } (x = y \text{ OR } x = -y)$$

であることが分かります。

(2a)  $x = y$  のとき (iii) から

$$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ (複号同順)}$$

となります。このとき  $\lambda = -\frac{1}{2}y$  から  $\lambda = \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}$  (複号同順) となります。まとめて、この場合は

$$(x, y, \lambda) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \text{ (複号同順)}$$

となります。

(2b)  $x = -y$  のとき (iii) から

$$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ (複号同順)}$$

となります。このとき  $\lambda = -\frac{1}{2}y$  から  $\lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$  (複号同順) となります。まとめて、この場合は

$$(x, y, \lambda) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \text{ (複号同順)}$$

となります。

VI  $x$  の関数  $y = \varphi(x)$  が

$$x^2 + \varphi(x)^2 - 3x\varphi(x) = 0 \tag{\#}$$

を満たしているとします。  $\varphi'(x)$  と  $\varphi''(x)$  を  $x$  と  $\varphi(x)$  で表しましょう。(CT294 ページ, 演習 8.18)

解答 (#) の両辺を微分して

$$2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - 3\varphi(x) - 3x\varphi'(x) = 0 \tag{\$}$$

すなわち

$$(2\varphi(x) - 3x)\varphi'(x) = -2x + 3\varphi(x)$$

から

$$\varphi'(x) = \frac{3\varphi(x) - 2x}{2\varphi(x) - 3x}$$

となります. (\$) の両辺を微分して

$$2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) - 3\varphi'(x) - 3\varphi'(x) - 3x\varphi''(x) = 0$$

すなわち

$$\begin{aligned}(2\varphi(x) - 3x) &= -2 - 2(\varphi'(x))^2 + 6\varphi'(x) \\ &= \frac{10\varphi(x)^2 - 30x\varphi(x) + 10x^2}{(2\varphi(x) - 3x)^2} \\ &= \frac{10}{(2\varphi(x) - 3x)^2}\end{aligned}$$

から

$$\varphi''(x) = \frac{10}{(2\varphi(x) - 3x)^3}$$

となります.

**VII**  $g(x, y) = 1 - xy = 0$  の下で  $z = f(x, y) = x + 2y$  を考えます. 停留点を求めて, 極大・極小を判定しましょう.

解答

$$g_x = -y, g_y = -x, f_x = 1, f_y = 2$$

と計算されます.  $f(x, y)$  が  $(x, y)$  において制約  $g(x, y) = 0$  の下で極大または極小ならば

$$\begin{cases} 1 + \lambda(-y) = 0 & (1) \\ 2 + \lambda(-x) = 0 & (2) \\ 1 - xy = 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす  $\lambda \in \mathbf{R}$  が存在します.

もし  $\lambda = 0$  ならば (1) が  $1 = 0$  となりますから, (1),(2),(3) の下では  $\lambda \neq 0$  であることが分かります. このとき (1) と (2) から

$$x = \frac{2}{\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

となります. (4) を用いて (3) から  $x$  と  $y$  を消去すると

$$1 - \frac{2}{\lambda^2} = 0 \quad \text{従って} \quad \lambda = \pm\sqrt{2} \tag{1}$$

であることが分かります. これから

$$(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad (\text{複号同順})$$

が停留点であることが示されました.

さらに

$$\begin{aligned}g_{xx} g_{yy} &= 0, \quad g_{xy} = g_{yx} = -1 \\f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yx} &= 0\end{aligned}$$

と計算すると Lagrange 関数  $L = f + \lambda g$  が

$$\begin{aligned}B &:= \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -y & -x \\ -y & 0 & -\lambda \\ -x & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2\lambda xy = -2\lambda\end{aligned}$$

を満たします.

(i)  $(x, y, \lambda) = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$  において

$$B = -2\sqrt{2} < 0$$

となりますから  $f$  は制約条件  $g = 0$  の下で極小であることが分かります.

(ii)  $(x, y, \lambda) = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$  において

$$B = 2\sqrt{2} > 0$$

となりますから  $f$  は制約条件  $g = 0$  の下で極大であることが分かります.

**VIII**  $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$  をその上の点  $(2, \sqrt{3})$  の近傍で解いて

$$\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 1} \tag{2}$$

とします.  $\varphi''(2)$  を  $g$  の 1 階および 2 階の偏微分係数を用いて求めましょう.

解答

$$\begin{aligned}g_x &= 2x, \quad g_y = -2y, \\g_{xx} &= 2, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0, \quad g_{yy} = -2\end{aligned}$$

と計算します. このとき

$$\begin{aligned}\varphi''(2) &= \frac{1}{g_y(2, \sqrt{3})} \begin{vmatrix} 0 & g_x(2, \sqrt{3}) & g_y(2, \sqrt{3}) \\ g_x(2, \sqrt{3}) & g_{xx}(2, \sqrt{3}) & g_{xy}(2, \sqrt{3}) \\ g_y(2, \sqrt{3}) & g_{yx}(2, \sqrt{3}) & g_{yy}(2, \sqrt{3}) \end{vmatrix} = \frac{1}{(2\sqrt{3})^3} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2\sqrt{3} \\ 4 & 2 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{24\sqrt{3}} (-4 \cdot 4 \cdot (-2) - 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2) = \frac{8}{24\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

**IX**  $g(x, y) = x + 2y - 1 = 0$  の下で  $z = f(x, y) = xy$  を考えます. 停留点を求めて極大・極小を判定しましょう.

解答

$$g_x = 1, g_y = 2, f_x = y, f_y = x$$

と計算します.  $f(x, y)$  が  $(x, y)$  において制約条件  $g(x, y) = 0$  の下で極大または極小ならば

$$\begin{cases} y + \lambda \cdot 1 = 0 & (1) \\ x + \lambda \cdot 2 = 0 & (2) \\ x + 2y - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

を満たす  $\lambda \in \mathbf{R}$  が存在します. このとき (1) と (2) から

$$x = -2\lambda, \quad y = -\lambda \tag{4}$$

が従います. さらに (1) の  $y$  を  $y = -2\lambda$  によって消去すると

$$-2\lambda - 2\lambda - 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda = -\frac{1}{4}$$

であることが分かります. これから

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{4}$$

が従います. さらに

$$\begin{aligned} g_{xx} = g_{xy} = g_{yx} = g_{yy} &= 0 \\ f_{xx} = 0, f_{xy} = f_{yx} &= 1, f_{yy} = 0 \end{aligned}$$

と計算します. すると Lagrange 関数  $L = f + \lambda g$  が

$$\begin{aligned} B &:= \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4 > 0 \end{aligned}$$

を満たしますから  $f$  は  $(x, y, \lambda) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$  において制約条件  $g = 0$  の下で極大であることが分かります.