2021年度後期 WL02 10月11日演習問題解答

I $p, q, I > 0$ とします．効用関数

$$u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で考えます．停留点を求めて極大点であることを示しましょう．

解答　$g(x,y) = I - px - qy$ とすると

$$g_x = -p,\ g_y = -q$$

$$u_x = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ u_y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

となります．(x,y) で極大または極小ならば

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + \lambda(-p) & = & 0 & \cdots\cdots(i) \\ \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + \lambda(-q) & = & 0 & \cdots\cdots(ii) \\ I - px - qy & = & 0 & \ldots\ldots(iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します．$x, y > 0$ ですから (i) から $\lambda \neq 0$ が分かります．さらに (i) と (ii) から

$$\begin{cases} \lambda p & = & \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \cdots\cdots(i)' \\ \lambda q & = & \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & \cdots\cdots(ii)' \end{cases}$$

が従います．(i)'/(ii)' から

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x} \quad \text{従って} \quad px = \frac{1}{2}qy$$

となります．(iii) に代入すると

$$I - \frac{1}{2}qy - qy = I - \frac{3}{2}qy = 0$$

が導かれ

$$x = \frac{I}{3p}, \quad y = \frac{2I}{3q}$$

となります．さらに (ii)' から

$$\lambda = \frac{1}{q}\left(\frac{I}{3p}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2I}{3q}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2q^2p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

となります．次に2階の条件を確認します．

$$g_{xx} = g_{xy} = g_{yx} = g_{yy} = 0$$

$$u_{xx} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ u_{xy} = u_{yx} = \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}},\ u_{yy} = -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}$$

となります．このとき $L = f + \lambda g$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \\ -q & \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} & -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}q^2 + \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}pq + \frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}}p^2 > 0 \end{aligned}$$

から停留点で極大であることが分かります.

II $p,q,I>0$ とします．効用関数

$$u(x,y)=\frac{1}{3}\log x+\frac{2}{3}\log y$$

を制約条件

$$I-px-qy=0$$

の下で考えます．停留点を求めて極大点であることを示しましょう．

解答 $g(x,y)=I-px-qy$ とすると

$$g_x=-p,\quad g_y=-q$$

$$u_x=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x},\quad u_y=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y}$$

となります．(x,y) で極大または極大とすると

$$\left\{\begin{array}{rcll}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+\lambda(-p) &=& 0 & \cdots\cdots(i)\\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y}+\lambda(-q) &=& 0 & \cdots\cdots(ii)\\ I-px-qy &=& 0 & \ldots\ldots(iii)\end{array}\right.$$

を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．(i) において $\lambda=0$ とすると $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}=0$ となりますが，これを満たす x は存在しません．従って $\lambda\neq 0$ であることが分かります．(i)(ii) から

$$px=\frac{1}{3\lambda},\quad qy=\frac{2}{3\lambda}\tag{iv}$$

が分かりますから，(iii) に代入して

$$I-\frac{1}{3\lambda}-\frac{2}{3\lambda}=I-\frac{1}{\lambda}=0\quad\text{すなわち}\quad\lambda=\frac{1}{I}$$

となります．これを (iv) に代入して

$$x=\frac{I}{3p},\quad y=\frac{2I}{3q}$$

であることが分かります.

次に 2 階の条件を確認しましょう．

$$g_{xx}=g_{xy}=g_{yx}=g_{yy}=0$$

$$u_{xx}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2},\quad u_{xy}=u_{yx}=0,\quad u_{yy}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^2}$$

であることが分かります．これから

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0 & g_x & g_y\\ g_x & L_{xx} & L_{xy}\\ g_y & L_{yx} & L_{yy}\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}0 & -p & -q\\ -p & -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2} & 0\\ -q & 0 & -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^2}\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{3}\cdot 1x^2q^2+\frac{2}{3}\cdot 1y^2p^2>0\end{aligned}$$

から停留点で極大であることが分かります.

III 制約条件

$$x^2 + 2y^2 - 24 = 0$$

の下で

$$z = x + y$$

を考えます. 停留点を求めて極大・極小を判定しましょう.

解答

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 24 = 0$$

の下で

$$z = f(x, y) = x + y$$

を考えます.

$$g_x = 2x,\ g_y = 4y,\ f_x = f_y = 1$$

と計算されますから, (x, y) で極大・極小ならば

$$\begin{cases} 1 + \lambda \cdot 2x &= 0 \quad \cdots\cdots(i) \\ 1 + \lambda \cdot 4y &= 0 \quad \cdots\cdots(ii) \\ x^2 + 2y^2 - 24 &= 0 \quad \ldots\ldots(iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します. (i) において $\lambda = 0$ とすると $1 = 0$ となりますから, $\lambda \neq 0$ が必要であることが分かります. (i) と (ii) から

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{4\lambda} \tag{iv}$$

が従いますが, これを (iii) に代入すると

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 24$$

となりますから, $\lambda = \pm\frac{1}{8}$ であることが分かります. (iv) に代入すると

$$x = \mp 4,\ y = \mp 2$$

であることが分かります. 以上で停留点は

$$(x, y, \lambda) = (\mp 4, \mp 2, \pm\frac{1}{8})$$

です.

つぎに 2 階の条件を確認しましょう.

$$g_{xx} = 2,\ g_{xy} = g_{yx} = 0,\ g_{yy} = 4$$

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = 0$$

であることが分かります．これから $L=f+\lambda g$ とおくと

$$\begin{aligned} B(x,y,\lambda) &:= \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 4y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 4y & 0 & 4\lambda \end{vmatrix} \\ &= -32\lambda y^2 - 16\lambda x^2 = -16\lambda(x^2+2y^2) = -16\cdot 24 \end{aligned}$$

が成立します．

(1) $\underline{(x,y,\lambda)=(-4,-2,\frac{1}{8})\text{ のとき}}$

$$B=-48<0$$

から極小であることが分かります．

(2) $\underline{(x,y,\lambda)=(4,2,-\frac{1}{8})\text{ のとき}}$

$$B=48>0$$

から極大であることが分かります．

IV 制約条件

$$g(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

の下で

$$z=f(x,y)=xy$$

を考えます．停留点を求めて極大・極小を判定しましょう．

解答

$$g_x=2x,\ g_y=2y,\ f_x=y,\ f_y=x$$

と計算されます．(x,y) で極大または極小であるとすると

$$\begin{cases} y+\lambda\cdot 2x &= 0 \quad \cdots\cdots(i) \\ x+\lambda\cdot 2y &= 0 \quad \cdots\cdots(ii) \\ x^2+y^2-1 &= 0 \quad \ldots\ldots(iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．(i) から $y=-2\lambda x$ となりますが、これを (ii) に代入すると

$$x(1-4\lambda^2)=0$$

となります．$x=0$ とすると (i) から $y=0$ となりますが，$(x,y)=(0,0)$ は (iii) を満たしません．よって $x\neq 0$ 従って

$$4\lambda^2=1 \quad \text{すなわち} \quad \lambda=\pm\frac{1}{2}$$

であることが分かります．

(1) $\underline{\lambda=\frac{1}{2}\text{ のとき}}$(i) から $x=-y$ となりますから (iii) に代入して $(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2})$ であることが分かります．

(2) $\underline{\lambda=-\frac{1}{2}\text{ のとき}}$(i) から $x=y$ となりますから (iii) に代入して $(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ であることが分かります．

さらに 2 階の条件について考えます.

$$g_{xx} = 2,\ g_{xy} = g_{yx} = 0,\ g_{yy} = 2$$
$$f_{xx} = 0,\ f_{xy} = f_{yx} = 1,\ f_{yy} = 0$$

であることが分かります. これから $L = f + \lambda g$ とおくと

$$\begin{aligned} B(x, y, \lambda) &:= \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} \\ &= -8\lambda y^2 + 4xy - 8\lambda x^2 \\ &= 4xy - 8\lambda \end{aligned}$$

となります.

(1) $(x, y, \lambda) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ のとき

$$B = 4 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{1}{2} = -6 < 0$$

から極小であることが分かります.

(2) $(x, y, \lambda) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$ のとき

$$B = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 > 0$$

から極大であることが分かります.

V $u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ とします. 制約条件

$$u(x, y) = \bar{u}$$

の下で $f(x, y) = px + qy$ を考えます. 停留点を求めましょう.

解答 (x, y) で極大・極小であるとすると

$$\begin{cases} p - \mu \cdot x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} &= 0 \quad \cdots\cdots (i) \\ q - \mu \cdot x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} &= 0 \quad \cdots\cdots (ii) \\ x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - \bar{u} &= 0 \quad \ldots\ldots (iii) \end{cases}$$

を満たす $\mu \in \mathbf{R}$ が存在します. (i) と (ii) から

$$\begin{cases} \mu \cdot x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} &= p \quad \cdots\cdots (i)' \\ \mu \cdot x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} &= q \quad \cdots\cdots (ii') \end{cases}$$

を得ます. (i)'/(ii)' から

$$\frac{y}{x} = \frac{p}{q}$$

となります. $y = \frac{p}{q}x$ として (iii) に代入すると

$$\bar{u} = x^{\frac{1}{3}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

から

$$x = \left(\bar{u} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

を得ます．また同様に

$$y = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

を得ます．このとき Lagrange 未定乗数は

$$\mu = 3\bar{u}^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$$

となります.

注意 ここで得た

$$x^*(p, q, \bar{u}) = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad y^*(p, q, \bar{u}) = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

を **Higgs 型（補償）需要関数**と呼びます.

VI V によって得られた **Higgs 型（補償）需要関数**を

$$x^*(p, q, \bar{u}),\ y^*(p, q, \bar{u})$$

とします．**最小支出関数**

$$E(p, q, \bar{u}) = px^*(p, q, \bar{u}) + qy^*(p, q, \bar{u})$$

と定めるとき，**マッケンジーの補題**

$$\frac{\partial E}{\partial p}(p, q, \bar{u}) = x^*(p, q, \bar{u})$$

$$\frac{\partial E}{\partial q}(p, q, \bar{u}) = y^*(p, q, \bar{u})$$

が成立することを示しましょう.

解答 最小支出関数は

$$\begin{aligned} E(p, q, \bar{u}) &= p \cdot \bar{U}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} + q \cdot \bar{U}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となります．これから

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial p} &= \bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = x^*(p, q, \bar{u}) \\ \frac{\partial E}{\partial q} &= \bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} = y^*(p, q, \bar{u}) \end{aligned}$$

VII VI に引続き，$I - px - qy = 0$ の下で $u(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ を最大化して需要関数

$$x(p,q,I) = \frac{I}{2p},\ y(p,q,I) = \frac{I}{2p}, \tag{3}$$

を得たとします．間接効用関数を

$$v(p,q,I) = u(x(p,q,I), x(p,q,I)) \tag{4}$$

と定めるとき，以下が成立することを具体的に計算して示しましょう．

(1)

$$x^*(p,q,\bar{u}) = x(p,q,E(p,q,\bar{u})) \tag{5}$$

(2)

$$x(p,q,I) = x^*(p,q,v(p,q,I)) \tag{6}$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \bar{u} \tag{7}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I)) = I \tag{8}$$

解答 (1)

$$x(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{E(p,q,\bar{u})}{2p} = \frac{2\bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}}{2p} = \bar{u}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = x^*(p,q,\bar{u})$$

(2)

$$v(p,q,I) = \left(\frac{I}{2p}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{I}{2q}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}}$$

から

$$x^*(p,q,v(p,q,I)) = \left(\frac{I^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{I}{2p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{I}{2p} = x(p,q,I)$$

(3)

$$v(p,q,E(p,q,\bar{u})) = \frac{\left(2\bar{u}^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \bar{u} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}} = \bar{u}$$

(4)

$$E(p,q,v(p,q,I)) = 2v(p,q,I)^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{I^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = 2\frac{I}{2p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = I$$

補足 スルツキー方程式　VIII を用いると

$$x^*(p,q,\bar{u}) = x(p,q,E(p,q,\bar{u}))$$

が成立することが分かります．この両辺を p, q で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^*}{\partial p} &= \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial p} \\ &= \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial I} \cdot x \\ \frac{\partial x^*}{\partial q} &= \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial I} \cdot \frac{\partial E}{\partial q} \\ &= \frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial I} \cdot y\end{aligned}$$

を得ます．$\frac{\partial y^*}{\partial p}, \frac{\partial y^*}{\partial q}$ も同様に計算すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial p} & \frac{\partial x^*}{\partial q} \\ \frac{\partial y^*}{\partial p} & \frac{\partial y^*}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial I} \\ \frac{\partial y}{\partial I} \end{pmatrix} (x \ y)$$

が従います．これをスルツキー方程式と呼びます．