L05 11/01 演習問題

(1)

$$I \quad u_x = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}},\ u_y = \frac{1}{4} x^{\frac{3}{4}} y^{-\frac{3}{4}},\ g_x = -p,\ g_y = -q$$

である. (x, y) で極大 (または極小) とすると

$$\begin{cases} \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} + \lambda(-p) = 0 & ① \\ \frac{1}{4} x^{\frac{3}{4}} y^{-\frac{3}{4}} + \lambda(-q) = 0 & ② \\ I - px - qy = 0 & ③ \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する. ①, ② から

$$\begin{cases} x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \lambda(-p) \quad \cdots ①' \\ x^{\frac{3}{4}} y^{-\frac{3}{4}} = 4 \lambda(-q) \quad \cdots ②' \end{cases}$$

となるが $①' \times x$, $②' \times y$ から

$$x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \lambda p x = 4 \lambda q y \quad \cdots ④$$

となる. ① に $\lambda = 0$ とすると $\frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} = 0$ となるが $x, y > 0$ なので
あり得ない. 従って $\lambda \neq 0$ となり, ④ から

$$\frac{1}{3} px = qy \quad \text{i.e} \quad px : qy = 3 : 1$$

となる. ③ から

$$px = \frac{3}{4} I,\ qy = \frac{1}{4} I \quad 従って \quad x = \frac{3I}{4p},\ y = \frac{I}{4q}$$

となる. ① から

$$\lambda = \frac{3}{4p} x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4p} \left(\frac{3}{4p} I\right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4q} I\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4} p^{-\frac{3}{4}} q^{-\frac{1}{4}}$$

と未定乗数を得る.

$L(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda(I - px - qy)$ ②

とすると

$$L_x = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - \lambda p, \quad L_y = \frac{1}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} - \lambda q$$

$$L_{xx} = -\frac{3}{16}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}, \quad L_{xy} = \frac{3}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}}, \quad L_{yy} = -\frac{3}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{7}{4}}$$

となるので ふちつき Hesse 行列式は

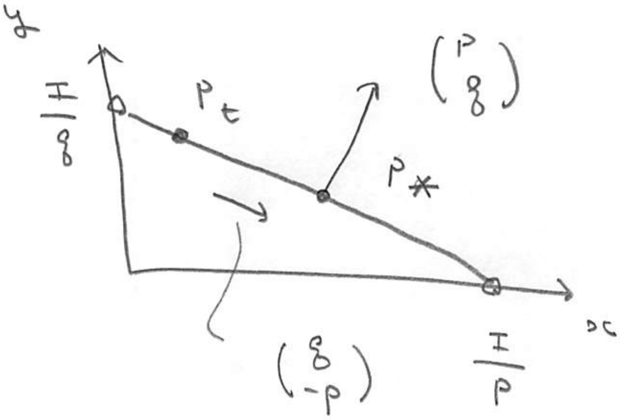
$$B = \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{3}{16}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} & \frac{3}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}} \\ -q & \frac{3}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}} & -\frac{3}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{7}{4}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{16}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}q^2 + \frac{3}{8}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}}pq + \frac{3}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{7}{4}}p^2 > 0$$

から 停留点 $P_*\left(\frac{3I}{4p}, \frac{I}{4q}\right)$ で極大であることが分かる.

(2)

$P_t\left(qt, \frac{I}{q} - pt\right)$ とおく.



$t_0 = \frac{3I}{4pq}$ のとき $P_{t_0} = P_*$ である.

①, ② は

$$\nabla(u)(P_{t_0}) = \lambda\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

にほかならないことに注意する. $U(t) = u(P_t)$ とおくと

$$U'(t) = \left(\nabla(u)(P_t), \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}\right)$$

特に $U'(t_0) = \left(\lambda\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}\right) = 0$

となる.

$$U''(t) = \left(H(u)(P_t)\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{16}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} & \frac{3}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{3}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}} & -\frac{3}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{7}{4}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}\right)$$

③

$$= -\frac{3}{16} x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} q^2 - \frac{3}{8} x^{-\frac{1}{4}} y^{-\frac{3}{4}} pq - \frac{3}{16} x^{-\frac{1}{4}} y^{-\frac{7}{4}} p^2 < 0$$

なので $t \neq t_0$ のとき $U(t) < U(t_0)$ 従って

$$u(P_t) < u(P_*) \quad (t \neq t_0)$$

が従う

---

(3) (2) により

$$g(P) = 0,\ P \neq P_* \Longrightarrow u(P) < u(P_*)$$

が示されている.

$$g(P) < 0,\ P \neq P_* \Longrightarrow u(P) < u(P_*)$$

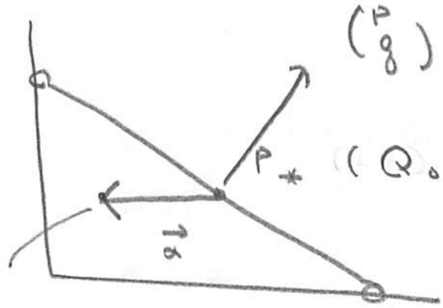
を示せばよい. $\overrightarrow{P_* P} = \vec{\alpha}$ として $Q_t = P_* + t\vec{\alpha}$ とする. このとき

$$g(Q_t) < 0 \quad (0 < t < 1)$$

が成立する.

$$\tilde{U}(t) := u(Q_t)$$

とする.



$$\frac{d}{dt}\tilde{U}(t) = (\nabla(u)(Q_t)\vec{\alpha}, \vec{\alpha})$$

特に $\frac{d}{dt}\tilde{U}(0) = (\nabla(u)(P_*), \vec{\alpha})$ $\quad P(Q_1)$

$$= \left(\lambda \binom{p}{q}, \vec{\alpha}\right) = \lambda\left(\binom{p}{q}, \vec{\alpha}\right) < 0$$

であるここで $\lambda > 0$ を用いた. 任意の $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$(H(u)(P)\vec{\beta}, \vec{\beta}) \leq 0$ が成立するので

$\tilde{U}''(t) = (H(u)\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) \leq 0$ が分かる. 0 と 1 の間の c に対して

$$U(1) = U(0) + U'(0)(1-0) + \frac{1}{2}U''(c) < U(0)$$

から $u(P) < U(P_0)$ が従います.

II (1) $U_x = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x}$, $U_y = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y}$, $g_x = -p$, $g_y = -q$

である. (x, y)で極大または極小ならば

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \lambda(-p) = 0 & ① \\ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y} + \lambda(-q) = 0 & ② \\ I - px - qy = 0 & ③ \end{cases}$$

を満たすλが存在します. ①において $\lambda = 0$ とすると $\frac{1}{x} = 0$ となりますから, $\lambda \neq 0$

であることが分かります. 従って①, ②から

$$x = \frac{3}{4\lambda p}, \quad y = \frac{1}{4\lambda q} \quad \cdots ④$$

であることが分かります. ③に代入すると

$$I - \frac{3}{4\lambda} - \frac{1}{4\lambda} = 0 \quad 従って \quad \frac{1}{\lambda} = I, \quad \lambda = \frac{1}{I}$$

となります. ④に代入すると

$$x = \frac{3I}{4p}, \quad y = \frac{I}{4q}$$

となります.

問題 ① $(x, y) = \left(\frac{3I}{4p}, \frac{I}{4q}\right)$ で極大となることをふちどりき Hesse行列式を用いて示せ.

② $(x, y) = \left(\frac{3I}{4p}, \frac{I}{4q}\right)$ で最大となることを示せ.

③ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{++} \mid g(x, y) = I - (px + qy) \geq 0\}$ の下で $(x, y) = \left(\frac{3I}{4p}, \frac{I}{4q}\right)$ で $u(x, y)$ が最大値をとることを方向微分を用いて示せ.

$$L = \frac{3}{4}\log x + \frac{1}{4}\log y + \lambda(I - px - qy)$$

とすると

$$L_x = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} - \lambda p,\quad L_y = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y} - \lambda q$$

$$L_{xx} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2},\quad L_{xy} = 0,\quad L_{yy} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y^2}$$

から

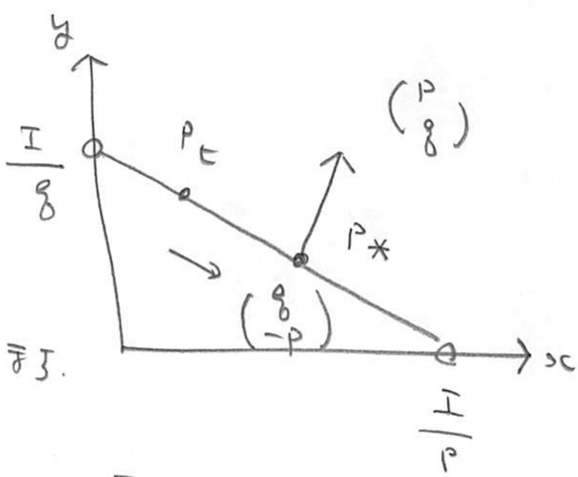
$$B = \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ -p & -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2} & 0 \\ -q & 0 & -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot q^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y^2}\cdot p^2 > 0$$

から $P_*\left(\frac{3I}{4p}, \frac{I}{4q}\right)$ で極大であることが分かります.

(2) $P_t\left(qt, \frac{I}{q} - pt\right)$

$$\left(0 < t < \frac{I}{pq}\right)$$

とします.



$t_0 = \frac{3I}{4pq}$ のとき $P_{t_0} = P_*$ となります.

①, ② は $\nabla(u)(P_{t_0}) = \lambda\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ に他なりません.

$U(t) = u(P_t)$ とすると

$$U'(t) = \left(\nabla(u)(P_t), \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}\right)$$

特に

$$U'(t_0) = \left(\lambda\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \text{となります.}$$

$$U''(t) = \left(H(u)(P_t)\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}\right)$$

で

$$u_{xx} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2} < 0,\quad \det H(u) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x^2y^2} > 0$$

から

$$(H(u)(P)\vec{v}, \vec{v}) < 0 \quad (P \in \mathbb{R}^2_{++}, \vec{v} \neq \vec{0}) \quad (\#)$$

が成立するので

$$U''(t) < 0$$

が常に成立します。$t \neq t_0$ のとき

$$U(t) < U(t_0) \quad \text{i.e.} \quad u(P_t) < u(P_*) \quad (t \neq t_0)$$

が従います。

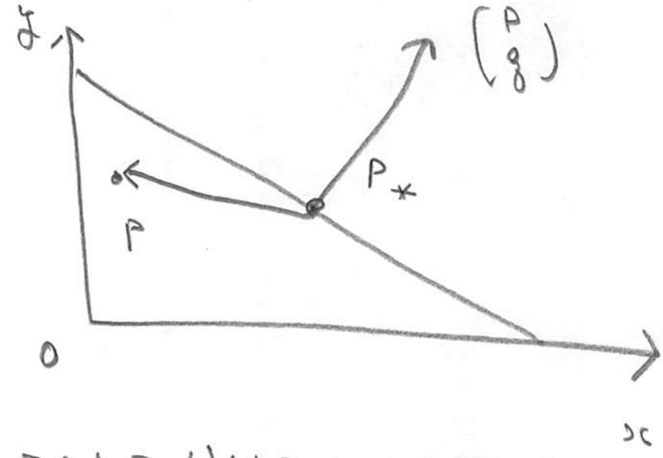
(3) (2)から

$$g(P) = 0, P \neq P_* \Rightarrow u(P) < u(P_*)$$

であることが分かります。

$$g(P) < 0, P \neq P_* \Rightarrow u(P) < u(P_*)$$

であることを示します。



$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{P_* P} \neq \vec{0}$$

とし

$Q_t = P_* + t\vec{\alpha}$ とします。このとき $U(t) = u(Q_t)$ とすると

$$U'(t) = (\nabla(u)(Q_t), \vec{\alpha})$$

特に $U'(0) = (\nabla(u)(P_*), \vec{\alpha}) = \lambda\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) \leq 0$

が成立します。ここで $\lambda > 0$ であることを用いました。さらに

$$U''(t) = (H(u)(Q_t)\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) < 0$$

が(#)から従います。0と1の間の $\exists c$ に対し

$$U(1) = U(0) + U'(0) + \frac{1}{2}U''(c) < U(0)$$

から

$$u(P) < u(P_*)$$ となります。