

I  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  とします.  $(x, y, z)$  が

$$ax + by + cz + d = 0$$

上を動くとき

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

の最小値が

$$d = \frac{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

となることを示しましょう. ここでは幾何的に考えましょう.

解答  $P_0(a, b, c)$  を通り平面  $ax + by + cz$  の法線ベクトル  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  を方向ベクトルとする直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示されます. この直線と与えられた平面との交点を求めるために

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$$

を解くと

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

となります. 従ってこの交点を  $P_1$  とおくと

$$\overrightarrow{P_0P_1} = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

となります. よって

$$|\overrightarrow{P_0P_1}|^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

が平面  $ax + by + cz + d = 0$  上の点  $Q$  と  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  との間の距離の自乗の最小値となります.

II  $g(x, y, z) = 0$  の下で  $w = f(x, y, z)$  の極値問題を考えましょう. 停留点を求めるだけで十分です.

(1)

$$g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \quad \text{の下で} \quad w = f(x, y, z) = xyz$$

(2)

$$g(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0 \quad \text{の下で} \quad w = f(x, y, z) = x + y + z$$

(3)

$$g(x, y, z) = x - 2y + 3z - 1 = 0 \quad \text{の下で} \quad w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

解答 (1)

となります.  $(x, y, z)$  で極値をもつとすると

$$g_x = g_y = g_z = 1, \quad f_x = yz, \quad f_y = xy, \quad f_z = xy \quad \left\{ \begin{array}{l} yz + \lambda = 0 \quad \dots(1) \\ xz + \lambda = 0 \quad \dots(2) \\ xy + \lambda = 0 \quad \dots(3) \\ x + y + z = 1 \quad \dots(4) \end{array} \right.$$

を満たす  $\lambda$  が存在します. (1), (2), (3) から

$$yz = xz = xy = \lambda$$

が必要であることが分かります. これからさらに

$$yz = xz \Leftrightarrow z = 0 \text{ OR } x = y \cdots (5)$$

$$xz = xy \Leftrightarrow x = 0 \text{ OR } y = z \cdots (6)$$

となりますが, (5) かつ (6) を以下のように 4 つの場合に分けて考えます.

(i)  $x = z = 0$  のとき (1), (2), (3) はいずれも  $\lambda = 0$  と必要十分になります. このとき (4) から  $y = 1$  が従います. 以上から

$$(x, y, z, \lambda) = (0, 1, 0, 0)$$

(ii)  $z = 0$  かつ  $y = z$  のとき, すなわち  $y = z = 0$  のとき (1), (2), (3) はいずれも  $\lambda = 0$  と必要十分になります. このとき (4) から  $x = 1$  が従います. 以上から

$$(x, y, z, \lambda) = (1, 0, 0, 0)$$

(iii)  $x = y$  かつ  $x = 0$  のとき, すなわち  $x = y = 0$  のとき (1), (2), (3) はいずれも  $\lambda = 0$  と必要十分になります. このとき (4) から  $z = 1$  が従います. 以上から

$$(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 1, 0)$$

(iii)  $x = y$  かつ  $y = z$  のとき  $x = y = z$  となるので, (4) から  $x = y = z = \frac{1}{3}$  となります. このとき  $\lambda = -\frac{1}{9}$  で (1), (2), (3) も成立します. 以上から

$$(x, y, z, \lambda) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)$$

(2)

$$g_x = 4x^3, g_y = 4y^3, g_z = 4z^3$$

$$f_x = f_y = f_z = 1$$

となります.  $(x, y, z)$  で極値をとるとすると

$$\begin{cases} 1 + 4\lambda x^3 = 0 & \cdots (1) \\ 1 + 4\lambda y^3 = 0 & \cdots (2) \\ 1 + 4\lambda z^3 = 0 & \cdots (3) \\ x^4 + y^4 + z^4 = 1 & \cdots (4) \end{cases}$$

を満たす  $\lambda \mathbf{R}$  が存在します. (1) において  $\lambda = 0$  とすると  $1 = 0$  となるので,  $\lambda \neq 0$  であることが分かる. 従って

$$x^3 = y^3 = z^3 = -\frac{1}{4\lambda} \quad (5)$$

となるが, これから  $x = y = z$  であることが分かる. これを (4) に代入すると

$$x = y = z = 3^{-\frac{1}{4}}$$

が従う. 最後に (5) に代入すると

$$\lambda = -\frac{1}{4} \cdot x^{-3} = -\frac{1}{4} 3^{\frac{3}{4}}$$

となる.

(3)

$$g_x = 1, g_y = -2, g_z = 3$$

$$f_x = 2x, f_y = 2y, f_z = 2z$$

となります.  $(x, y, z)$  で極値をとるとすると

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 & \cdots (1) \\ 2y - 2\lambda = 0 & \cdots (2) \\ 2z + 3\lambda = 0 & \cdots (3) \\ x - 2y + 3z - 1 = 0 & \cdots (4) \end{cases}$$

を満たす  $\lambda \mathbf{R}$  が存在します. (1), (2), (3) から

$$x = -\frac{1}{2}, y = \lambda, z = -\frac{3}{2}\lambda$$

と  $x, y, z$  が  $\lambda$  で表されますが, (4) に代入すると

$$-\frac{1}{2}\lambda - 2\lambda - \frac{9}{2}\lambda - 1 = 0$$

から  $\lambda = \frac{1}{7}$  となります. これを (5) に代入して

$$x = \frac{1}{14}, y = \frac{1}{7}, z = \frac{3}{14}, \lambda = -\frac{1}{7}$$

であることが示されました.

III 次の曲面の  $P_0$  における接平面を求めましょう. </dd>

(1)

$$g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 17 = 0 \quad \text{at } P_0(2, -1, 1)$$

(2)

$$g(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + 9z^2 - 1 = 0 \quad \text{at } P_0(1, 1, -\frac{2}{3})$$

(3)

$$g(x, y, z) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{4}} - 1 = 0 \quad \text{at } P_0(1, 1, 1)$$

解答 (1)

$$g_x = 2x, \quad g_y = 8y, \quad g_z = 18z$$

なので

$$g_x(P_0) = 4, \quad g_y(P_0) = -8, \quad g_z(P_0) = 18$$

となります. 従って接線の方程式は

$$4(x - 2) - 8(y + 1) + 18(z - 1) = 0$$

(2)

$$g_x = 2x, \quad g_y = -8y, \quad g_z = 18z$$

なので

$$g_x(P_0) = 2, \quad g_y(P_0) = -8, \quad g_z(P_0) = -12$$

となります. 従って接線の方程式は

$$2(x - 1) - 8(y - 1) - 12(z - \frac{2}{3}) = 0$$

(3)

$$g_x = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{4}}, \quad g_y = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{4}}, \quad g_z = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{3}{4}}$$

なので

$$g_x(P_0) = \frac{1}{2}, \quad g_y(P_0) = \frac{1}{3}, \quad g_z(P_0) = \frac{1}{4}$$

となります. 従って接線の方程式は

$$\frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{3}(y - 1) + \frac{1}{4}(z - 1) = 0$$