

第1章 形式論理，集合，写像

1.1 命題

命題とは真 (True) か偽 (False) がはっきりしている文のことです。

$$1 < 2$$

は真であり

$$1 > 2$$

は偽です。

P_1 と P_2 が命題であるとし、 P_1 かつ P_2 ($P_1 \wedge P_2$) が真であるのは P_1 と P_2 の両方が真のときです。このことを真理表 (真偽表) (truth table) と呼ぶ次の表で表します。

| P_1 | P_2 | $P_1 \wedge P_2$ |
|-------|-------|------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

P_1 または P_2 ($P_1 \vee P_2$) が真であるのは P_1 と P_2 のどちらか少なくとも一方が真のときです。真理表では次のようになります。

| P_1 | P_2 | $P_1 \vee P_2$ |
|-------|-------|----------------|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

P_1 の否定 $\neg(P_1)$ が真となるのは P_1 が偽であるときです。真理表では次のようになります。

| P_1 | $\neg(P_1)$ |
|-------|-------------|
| T | F |
| F | T |

となります。

P_1 ならば P_2 ($P_1 \Rightarrow P_2$) が偽であるのは P_1 が真であってかつ P_2 が偽であるときで、その他の場合は真となります。真理表では

| P_1 | P_2 | $P_1 \implies P_2$ |
|-------|-------|--------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

となります.

P_1 と P_2 が同値であるという命題 $P_1 \Leftrightarrow P_2$ は P_1 と P_2 の真偽が一致するとき真になります. 真理表では

| P_1 | P_2 | $P_1 \Leftrightarrow P_2$ |
|-------|-------|---------------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

となります.

1.2 論理式, 同値式, トートロジー

命題 P_1, P_2, \dots を $\wedge, \vee, \neg(\cdot), \implies, \Leftrightarrow$ を用いて組み合わせてできる命題を**論理式**と呼びます¹. 例えば

$$L_1(P_1, P_2) := (P_1 \implies P_2)$$

$$L_2(P_1, P_2) := (\neg(P_2) \implies \neg(P_1))$$

$$L_3(P_1, P_2) := (\neg(P_1) \vee P_2)$$

と定めましょう. L_2 と L_3 の P_1, P_2 の真偽の取り方による真偽の値を計算します. まず L_2 について考えると

| P_1 | P_2 | $\neg(P_1)$ | $\neg(P_2)$ | $\neg(P_2) \implies \neg(P_1)$ |
|-------|-------|-------------|-------------|--------------------------------|
| T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T |
| F | F | T | T | T |

となります. 次に L_3 の値は

¹ $\wedge, \vee, \neg(\cdot)$, を使うだけでよいことが以下で示されます.

| P_1 | P_2 | $\neg(P_1)$ | $\neg(P_1) \vee P_2$ |
|-------|-------|-------------|----------------------|
| T | T | F | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | T |
| F | F | T | T |

となります. 以上で $L_1(P_1, P_2)$, $L_2(P_1, P_2)$, $L_3(P_1, P_2)$ は常に同一の真偽値をとることが分かりました. これをもって

$$L_1(P_1, P_2) \equiv L_2(P_1, P_2) \equiv L_3(P_1, P_2)$$

と記します. L_1, L_2, L_3 は**同値式**であるといいます. また, $P_1 \Rightarrow P_2$ に対して $\neg(P_2) \Rightarrow \neg(P_1)$ をその**対偶** (contraposition) と呼びます.

演習 1.1. 以下の同値式を示しましょう.

$$(P_1 \Leftrightarrow P_2) \equiv ((P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)) \quad (1.1)$$

$$\text{(ド・モルガンの法則)} \quad \neg(P_1 \wedge P_2) \equiv (\neg(P_1) \vee \neg(P_2)) \quad (1.2)$$

$$\text{(ド・モルガンの法則)} \quad \neg(P_1 \vee P_2) \equiv (\neg(P_1) \wedge \neg(P_2)) \quad (1.3)$$

注意 以下の同値式はより基本的です.

$$\text{(交換則)} \quad P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad P \vee Q \equiv Q \vee P \quad (1.4)$$

$$\text{(結合則)} \quad (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R), \quad (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \quad (1.5)$$

$$\text{(分配則)} \quad (P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad (1.6)$$

$$\text{(分配則)} \quad (P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (1.7)$$

結合則 (1.5) があるので, (1.5) にある命題をそれぞれ

$$P \wedge Q \wedge R, \quad P \vee Q \vee R$$

と表記しても紛れることがないことに注意しましょう.

演習 1.2. (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) を証明しましょう.

注意 以下の同値式も基本的です.

$$\text{(2重否定の法則)} \quad \neg(\neg(P)) \equiv P \quad (1.8)$$

演習 1.3. (1.8) を示しましょう.

次に論理式

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P \quad (1.9)$$

を考えます. 真理表

| P | Q | $P \wedge Q$ | $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ |
|---|---|--------------|------------------------------|
| T | T | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | F | T |
| F | F | F | T |

から分かるように P, Q の真偽値によらず真となります. このような論理式を**トートロジー** (tautology) あるいは**恒真式**と呼びます. このトートロジー $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ ですが, 同値式として

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \Rightarrow P &\equiv \neg(P \wedge Q) \vee P \\ &\equiv (\neg(P) \vee \neg(Q)) \vee P \\ &\equiv (P \vee \neg(P)) \vee \neg(Q) \end{aligned}$$

と変形できます. より一般に

$$(P \vee \neg(P)) \vee Q \quad (1.10)$$

はトートロジーになりますから

$$(P \vee \neg(P)) \vee \neg(Q) \text{ 従って } (P \wedge Q) \Rightarrow P$$

がトートロジーであることが示されます. (1.10) がトートロジーであるのは真理表

| P | Q | $\neg(P)$ | $P \vee \neg(P)$ | $(P \vee \neg(P)) \vee Q$ |
|---|---|-----------|------------------|---------------------------|
| T | T | F | T | T |
| T | F | F | T | T |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T |

から分かります. この真理表から

$$\text{(排中律)} \quad P \vee \neg(P) \quad (1.11)$$

がトートロジーであることが分かります.

演習 1.4. 論理式

$$P \Rightarrow (P \vee Q) \quad (1.12)$$

がトートロジーであることを示しましょう.

上で掲げた排中律 (1.11) を含めて, 基本的なトートロジーを列挙しておきましょう.

$$\text{(同一律)} \quad P \Rightarrow P \tag{1.13}$$

$$\text{(排中律)} \quad P \vee \neg(P) \tag{1.14}$$

$$\text{(矛盾律)} \quad \neg(P \wedge \neg(P)) \tag{1.15}$$

演習 1.5. (1.13),(1.15) がトートロジーであることを示しましょう.

最後に論理式

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P \tag{1.16}$$

がトートロジーであることを示しましょう (このことを**パースの法則**と呼びます).

$$\begin{aligned} ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P &\equiv \neg((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \vee P \\ &\equiv \neg(\neg(\neg(P) \vee Q) \vee P) \vee (P) \\ &\equiv ((\neg(P) \vee Q) \wedge \neg(P)) \vee P \\ &\equiv (\neg(P) \vee Q \vee P) \wedge (\neg(P) \vee P) \\ &\equiv ((\neg(P) \vee P) \vee Q) \wedge (\neg(P) \vee P) \end{aligned}$$

において $(\neg(P) \vee P) \vee Q$ と $(\neg(P) \vee P)$ がトートロジーなので, 最右辺がトートロジーであることが分かります. よって (1.16) がトートロジーであることが従います.

演習 1.6.

$$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \tag{1.17}$$

がトートロジーであることを示しましょう.

1.3 命題関数

X を集合とします. $x \in X$ に依存する命題を**命題関数**と呼びます. 例えば $X = \mathbb{R}$ のとき

$$P(x) := (x > 1)$$

$$Q(x) := (x \leq 1)$$

は \mathbb{R} 上で定義される命題関数です. 一般に $P(x)$ を X 上の命題関数とすると, すべての $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題を

$$\forall x \in X \quad [P(x)]$$

と記します. 他方, ある $x \in X$ に対して $P(x)$ が成立するという命題を

$$\exists x \in X \quad [P(x)]$$

と記します².

以下の公式

$$\neg(\forall x \in X [P(x)]) \equiv (\exists x \in X \neg(P(x))) \quad (1.18)$$

$$\neg(\exists x \in X [P(x)]) \equiv (\forall x \in X \neg(P(x))) \quad (1.19)$$

は重要です.

1.4 集合

1.4.1 包含関係

以下では集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ を考えます.

1.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

2.

$$\neg(A \subset B) \Leftrightarrow \exists x \in A (x \notin B)$$

注意

$$A \subset B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A (x \in B)$$

さらにこの条件は

$$\forall x \in X (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

と同値であることにも注意しましょう.

3.

$$(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C \quad (1.20)$$

(1.20) は命題 P, Q, R に対して, 論理式

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \quad (1.21)$$

がトートロジーであることから導かれます. 実際, $x \in X$ に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

が常に成立することから (1.20) が成立することが分かります.

² \forall は all, any の A, \exists は exist の E が由来である.

演習 1.7. (1.21) を真理表を用いて証明しましょう.

4.

$$(A \subset B \wedge A \subset C) \Leftrightarrow A \subset B \cap C \quad (1.22)$$

(1.22) を証明する前に

$$B \cap C \subset B, \quad B \cap C \subset C$$

が常に成立することに注意しましょう. 例えば $B \cap C \subset B$ ですが, $x \in X$ に対して

$$(x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow x \in B$$

がトートロジーであることから従います ((1.9) 参照).

以上の注意をもとに (1.22) を証明しましょう.

(\Leftarrow) $A \subset B \cap C, B \cap C \subset B$ から $A \subset B$ が従います. 同様に $A \subset B \cap C, B \cap C \subset C$ から $A \subset C$ が従います.

(\Rightarrow) $\forall x \in A$ をとると, $x \in B$ かつ $x \in C$ が成立しているが, このとき $x \in B \cap C$ が従う. 以上で $A \subset B \cap C$ が導かれました.

実は (1.22) は, 命題 P, Q, R に対して同値式

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \equiv P \Rightarrow (Q \wedge R) \quad (1.23)$$

が成立することから直接導くことができます. 実際 $x \in X$ に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \Rightarrow x \in C)) \equiv (x \in A \Rightarrow (x \in B \wedge x \in C))$$

が (1.22) に他なりません. また (1.23) は

$$\begin{aligned} (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) &\equiv (\neg(P) \vee Q) \wedge (\neg(P) \vee R) \\ &\equiv \neg(P) \vee (Q \wedge R) \\ &\equiv P \Rightarrow (Q \wedge R) \end{aligned}$$

と証明できます.

5.

$$(A \subset C \wedge B \subset C) \Leftrightarrow A \cup B \subset C \quad (1.24)$$

(1.24) を証明する前に

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B$$

が常に成立することに注意しましょう. 例えば $A \subset A \cup B$ ですが, $x \in X$ に対して

$$x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

がトートロジーであることから従います ((1.12) 参照).

次に (1.24) を証明しましょう.

(\Leftarrow) $A \subset A \cup B, A \cup B \subset C$ から $A \subset C$ が従います. 同様に $B \subset A \cup B, A \cup B \subset C$ から $B \subset C$ が従います.

(\Rightarrow)

$$\forall x \in A \text{ に対して } x \in C$$

$$\forall x \in B \text{ に対して } x \in C$$

が成立するとします. このとき $x \in A \cup B$ が成立しているとします. すると

$$x \in A \vee x \in B$$

が従います. $x \in A$ ならば $x \in C, x \in B$ ならば $x \in C$ となりますから, $x \in C$ であることが分かります. これは

$$A \cup B \subset C$$

が成立することを意味します.

実は (1.24) は, 命題 P, Q, R に対して同値式

$$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv (P \vee Q) \Rightarrow R \quad (1.25)$$

が成立することから直接導くことができます. 実際 $x \in X$ に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in C) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \equiv (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in C$$

が (1.24) に他なりません. また (1.25) は

$$\begin{aligned} (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) &\equiv (\neg(P) \vee R) \wedge (\neg(Q) \vee R) \\ &\equiv (\neg(P) \wedge \neg(Q)) \vee R \\ &\equiv \neg(P \vee Q) \vee R \\ &\equiv (P \vee Q) \Rightarrow R \end{aligned}$$

と証明できます.

6. (分配法則)

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (1.26)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1.27)$$

(1.26) を示します.

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in C \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C \\
 &\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)
 \end{aligned}$$

演習 1.8. (1.27) を証明しましょう.

注意 上で (1.26) を示すために (1.6) すなわち

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad (1.28)$$

を用いました. また (1.27) を示すには (1.7) すなわち

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (1.29)$$

を用います.

注意 以下の基本的な等式があります.

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \quad (1.30)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (1.31)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (1.32)$$

1.4.2 差集合・補集合

$A, B, C \subset X$ とします. このとき X の部分集合

$$A \setminus B := \{x \in X; x \in A \wedge x \notin B\}$$

を定義します.

1. (ド・モルガン則)

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad (1.33)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (1.34)$$

(1.33) を示します.

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \notin (B \cup C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad \neg(x \in B \quad \vee \quad x \in C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (x \notin B \quad \wedge \quad x \notin C) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \notin B) \quad \wedge \quad (x \in A \quad \wedge \quad x \notin C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \quad \wedge \quad x \in A \setminus C \\
 &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)
 \end{aligned}$$

演習 1.9. (1.34) を示しましょう.

さらに

$$A^c := X \setminus A$$

と定義して A の補集合と呼びます. 上の (1.33), (1.34) から次の (1.35), (1.36) が従います.

2. (ド・モルガン則)

$$(B \cup C)^c = B^c \cap C^c \quad (1.35)$$

$$(B \cap C)^c = B^c \cup C^c \quad (1.36)$$

1.4.3 直積集合

X と Y, Z を集合とします. このとき

$$X \times Y := \{(x, y); x \in X, y \in Y\}$$

$$X \times Y \times Z := \{(x, y, z); x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

を直積集合と呼びます. 例えば 2次元列ベクトル全体の集合

$$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

に対して

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 := \{(\vec{x}, \vec{y}); \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2\}$$

と 2本の 2次元列ベクトルの順列全体の集合が定まります. このとき

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

に注意しましょう.

3次元列ベクトル全体の集合

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

に対して

$$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3 := \{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}); \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^3\}$$

と3本の3次元列ベクトルの順列全体の集合が定まります.

1.5 写像

X, Y 集合として写像

$$f: X \rightarrow Y$$

が与えられているとします. このとき X を**定義域**, Y を**値域**と呼びます.

注意 $f: X \rightarrow X$ を X 上の**変換**と呼びます.

1. (像, グラフ) $A \subset X$ に対して Y の部分集合

$$f(A) := \{f(a) \in Y; a \in A\}$$

を A の f による**像**と呼びます.

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y; x \in X\}$$

を f の**グラフ**と呼びます.

2. (合成) Z を集合として写像

$$g: Y \rightarrow Z$$

を考えます. このとき

$$g \circ f: X \rightarrow Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

を f と g の**合成**と呼びます.

3. (写像の合成に関する結合則)

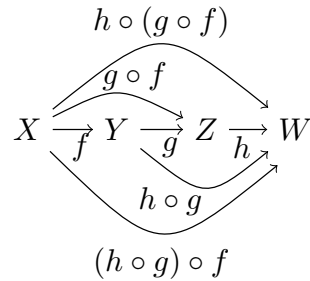
さらに集合 W と写像

$$h: Z \rightarrow W$$

があるとき

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (1.37)$$

が成立します.



演習 1.10. (1.37) を示しましょう.

4. (逆写像) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y \quad (1.38)$$

を満たす g を f の**逆写像**と呼びます.

逆写像は存在すれば一意的に定まります. すなわち 2 つの写像

$$g_1: Y \rightarrow X, \quad g_2: Y \rightarrow X$$

が

$$g_1 \circ f = id_X, \quad f \circ g_1 = id_Y, \quad g_2 \circ f = id_X, \quad f \circ g_2 = id_Y$$

を満たすならば $g_1 = g_2$ が成立します. 実際

$$g_2 = id_X \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ id_Y = g_1$$

からこのことは証明できます. この一意性から f の逆写像を

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

と記します.

5. (全射) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$f(X) = Y$$

が成立するとき, すなわち

$$\forall y \in Y \text{ に対して } \exists x \in X \text{ が存在して } f(x) = y$$

が成立するとき, f は**全射**であるといいます.

定理 1.1. ある写像 $g: Y \rightarrow X$ が

$$f \circ g = id_Y$$

を満たせば, f は全射となります.

証明 任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(g(y))$$

が成立しますから, f が全射であることが分かります.

6. (単射) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

が成立するとき, f は**単射**であるといいます.

定理 1.2. ある写像 $g: Y \rightarrow X$ が

$$g \circ f = id_X$$

を満たせば, f は単射となります.

証明 $f(x) = f(x')$ とすると

$$g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

から

$$x = x'$$

が従います.

7. (全単射) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射かつ単射であるとき f を**全単射**と呼びます.

定理 1.1 と定理 1.2 から次の定理 1.3 が従います.

定理 1.3. $f: X \rightarrow Y$ に逆写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在すれば f は全単射であることが従います.

定理 1.3 の逆が成立します.

定理 1.4. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射ならば, f には逆写像が存在します.

証明 逆写像 $g: Y \rightarrow X$ を構成します. f は全射ですから任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x)$$

を満たす $x \in X$ が存在します. しかもこの条件を満たす $x \in X$ はただ一つ存在します. 実際 f は単射ですから

$$f(x) = f(x') \quad \text{から} \quad x = x'$$

が従うからです. この状況で

$$g(y) := x$$

と定義します. この式を $y = f(x)$ の x に代入すると

$$y = f(g(y))$$

が成立することが分かります. さらに任意の $x \in X$ に対して $y = f(x)$ と定めると g の定義から $g(y) = x$ となりますが

$$g(f(x)) = x$$

が従います.

1.6 補足-論理式, 同値式, トートロジー

1.6.1 補足-命題関数 (1 変数)

集合 X 上定義された命題関数 $P(x), Q(x)$ を考えます. このとき同値式

$$\forall x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x \in X (P(x))) \wedge (\forall x \in X (Q(x))) \quad (1.39)$$

が成立します. 実際, 任意の $x \in X$ に対して

$$P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow P(x), \quad P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow Q(x)$$

はそれぞれトートロジーですから

$$\forall x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X (P(x)), \quad \forall x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x)),$$

が成立します. よって

$$\forall x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X (P(x))) \wedge (\forall x \in X (Q(x)))$$

が成立します. 逆に

$$\forall x \in X (P(x)) \quad \text{と} \quad \forall x \in X (Q(x))$$

が成立しているとします. このとき任意の $x \in X$ に対して $P(x)$ と $Q(x)$ が成立しますから, $P(x) \wedge Q(x)$ が成立します. よって

$$\forall x \in X (P(x) \wedge Q(x))$$

が成立することが分かりました.

次に

$$(\forall x \in X (P(x))) \vee (\forall x \in X (Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X (P(x) \vee Q(x)) \quad (1.40)$$

が成立することを示しましょう. 実際, 任意の $x \in X$ に対して

$$P(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x)), \quad \text{および} \quad Q(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x))$$

がトートロジーです. 従って

$$\forall x \in X (P(x)) \Rightarrow \forall x \in X (P(x) \vee Q(x))$$

$$\forall x \in X (Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X (P(x) \vee Q(x))$$

が成立します. 一般にトートロジー

$$(P_1 \Rightarrow P_3) \vee (P_2 \Rightarrow P_3) \Rightarrow ((P_1 \vee P_2) \Rightarrow P_3)$$

が成立することを用いると (1.40) が従います.

演習 1.11. (1.40) の逆, すなわち

$$\forall x \in X (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X (P(x))) \vee (\forall x \in X (Q(x)))$$

が成立しないことを示しましょう。

さらに (1.39), (1.40) と関係する同値式, トートロジーを紹介します。

$$\exists x \in X (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x \in X (P(x))) \vee (\exists x \in X (Q(x))) \quad (1.41)$$

(\Rightarrow) (1.41) の左辺が成立するとします。すなわち, ある $a \in X$ に対して $P(a) \vee Q(a)$ が成立するとします。このとき $P(a)$ が真であるか, または $Q(a)$ が真となります。 $P(a)$ が真ならば, $\exists x \in X (P(x))$ が真となります。他方 $Q(a)$ が真ならば, $\exists x \in X (Q(x))$ が真となります。従っていずれの場合も

$$\exists x \in X (P(x)) \vee \exists x \in X (Q(x))$$

が真となります。

(\Leftarrow) (1.41) の右辺が成立するとします。 $\exists x \in X (P(x))$ が真ならばある $a \in X$ に対して $P(a)$ が真となります。このとき $P(a) \vee Q(a)$ が真となりますから, $\exists x \in X (P(x) \vee Q(x))$ が真となります。他方, $\exists x \in X (Q(x))$ が真ならばある $a \in X$ に対して $Q(a)$ が真となります。このとき $P(a) \vee Q(a)$ が真となりますから, $\exists x \in X (P(x) \vee Q(x))$ が真となります。

以上で証明が済みましたが, (1.41) の両辺の否定が同値であることを示すという方法もあります。すなわち

$$\begin{aligned} \neg(\exists x \in X (P(x) \vee Q(x))) &\equiv \forall x \in X (\neg(P(x)) \wedge \neg(Q(x))) \\ &\stackrel{(*)}{\equiv} (\forall x \in X (\neg(P(x)))) \wedge (\forall x \in X (\neg(Q(x)))) \\ &\equiv \neg(\neg(\forall x \in X (\neg(P(x)))) \wedge \neg(\forall x \in X (\neg(Q(x)))))) \\ &\equiv \neg(\exists x \in X (P(x)) \vee \exists x \in X (Q(x))) \end{aligned}$$

から (1.41) が従います。ここで (*) において (1.39) を用いました。

演習 1.12. 同値式

$$\exists x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv (\forall x \in X (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X (Q(x)))$$

が成立することを示しましょう。

次に (1.40) と関係するトートロジー

$$\exists x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in X (P(x))) \wedge (\exists x \in X (Q(x))) \quad (1.42)$$

を紹介します。左辺が真ならば, ある $a \in X$ に対して $P(a) \wedge Q(a)$ が成立します。従って $P(a)$ と $Q(a)$ が真です。従って $\exists x \in X (P(x))$ と $\exists x \in X (Q(x))$ が真ですから

$$(\exists x \in X (P(x))) \wedge (\exists x \in X (Q(x)))$$

が真であることが分かります.

演習 1.13. (1.42) の対偶が真であることを (1.40) を用いて示しましょう.

演習 1.14.

$$\forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x \in X (P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X (Q(x))))$$

がトートロジーであることを示しましょう.

演習 1.15.

$$\forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in X (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X (Q(x))))$$

がトートロジーであることを示しましょう.

1.6.2 補足-命題関数 (多変数)

集合 X, Y があるとします. その直積集合 $X \times Y$ 上の命題関数 $P(x, y)$ を考えます. このとき

$$\forall y \in Y (P(x, y)), \quad \exists y \in Y (P(x, y))$$

は X 上の命題関数となります. 他方

$$\forall x \in X (P(x, y)), \quad \exists x \in X (P(x, y))$$

は Y 上の命題関数となります.

実例を考えます. $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ として、 $X \times Y$ 上の命題関数

$$P(x, y) := (2x + y < 8) \quad (1.43)$$

を考えます. このとき $2x + y$ の値に関する右の表から

$$\forall y \in Y (P(x, y)) \equiv (x = 1)$$

$$\exists y \in Y (P(x, y)) \equiv (x = 1, 2, 3)$$

であることが分かります.

別の実例を考えます.

$$X = Y = \mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R}; x > 0\}$$

として、 $X \times Y$ 上の命題関数

$$P(x, y) := (y > x^2)$$

を考えます. すると

$$\forall y \in Y (P(x, y)) \equiv F, \quad \exists y \in Y (P(x, y)) \equiv T$$

| $y \backslash x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|----------|----------|----------|----|----|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |

となります. さらに残っている変数 $x \in X$ について考えると

$$\begin{aligned} \forall x \in X (\forall y \in Y (P(x, y))) &\equiv F, & \exists x \in X (\forall y \in Y (P(x, y))) &\equiv F \\ \forall x \in X (\exists y \in Y (P(x, y))) &\equiv T, & \exists x \in X (\exists y \in Y (P(x, y))) &\equiv T \end{aligned}$$

となります. 他方, $x \in X$ から考えると

$$\forall x \in X (P(x, y)) \equiv F, \quad \exists x \in X (P(x, y)) \equiv T$$

となります. さらに残っている変数 $y \in Y$ について考えると

$$\begin{aligned} \forall y \in Y (\forall x \in X (P(x, y))) &\equiv F, & \exists y \in Y (\forall x \in X (P(x, y))) &\equiv F \\ \forall y \in Y (\exists x \in X (P(x, y))) &\equiv T, & \exists y \in Y (\exists x \in X (P(x, y))) &\equiv T \end{aligned}$$

となります.

このように2変数の命題関数に限定作用素を施して8種類の命題を構成できますが, 紛れない限り括弧を二重にするのはやめて, 例えば

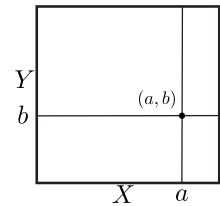
$$\exists x \in X (\forall y \in Y (P(x, y))) \quad \text{は} \quad \exists x \in X \forall y \in Y (P(x, y))$$

と略記することになります. これらの8種類の命題の間で成立することを説明します.

$$\forall (x, y) \in X \times Y (P(x, y)) \equiv \forall x \in X \forall y \in Y (P(x, y)) \equiv \forall y \in Y \forall x \in X (P(x, y)) \quad (1.44)$$

$$\exists (x, y) \in X \times Y (P(x, y)) \equiv \exists x \in X \exists y \in Y (P(x, y)) \equiv \exists y \in Y \exists x \in X (P(x, y)) \quad (1.45)$$

ですが, (1.44), (1.45) とともに図式的に $X \times Y$ を用いて示すことができます.



一般に1変数の命題関数 $R(y)$ に対して

$$\forall y \in Y (R(y)) \Rightarrow \exists y \in Y (R(y))$$

はトートロジーです. 従って, 任意の $x \in X$ に対して

$$\forall y \in Y (P(x, y)) \Rightarrow \exists y \in Y (P(x, y))$$

が成立します. よって

$$\forall x \in X \forall y \in Y (P(x, y)) \Rightarrow \forall x \in X \exists y \in Y (P(x, y)) \tag{1.46}$$

$$\exists x \in X \forall y \in Y (P(x, y)) \Rightarrow \exists x \in X \exists y \in Y (P(x, y)) \tag{1.47}$$

がトートロジーであることが分かります. 次に

$$\exists x \in X \forall y \in Y (P(x, y)) \Rightarrow \forall y \in Y \exists x \in X (P(x, y)) \tag{1.48}$$

がトートロジーであることを説明します. 左辺が成立するならば, ある $a \in X$ に対して

$$\forall y \in Y (P(a, y))$$

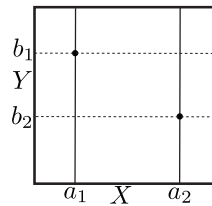
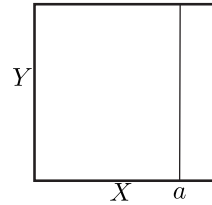
が成立します. 従って任意の $b \in Y$ に対して

$$P(a, b) \text{ 従って } \exists x \in X (P(x, b))$$

が成立します. さらにこれは

$$\forall y \in Y \exists x \in X (P(x, y))$$

が成立することを意味します. 右上図が左辺, 右下図が右辺が成立することを表しています. すなわち右上図の場合は



$$\{(x, y) \in X \times Y; x = a\}$$

が $P(x, y)$ の真理集合に含まれているという意味です. また右辺が成立する場合は任意の $b \in Y$ に対して

$$\{(x, y) \in X \times Y; y = b\}$$

に真理集合の点が少なくとも 1 点含まれていることを意味します.

最後に 2 変数の命題関数 $P(x, y)$ に $x \in X, Y \in Y$ に関する限定作用素を施して得られる命題, 例えば $\forall x \in X \exists y \in Y (P(x, y))$ の否定について考えます.

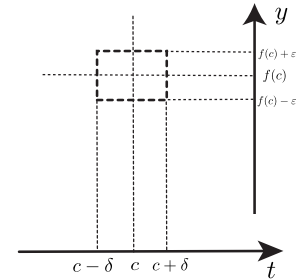
$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in X \exists y \in Y (P(x, y))) &\equiv \exists x \in X \neg(\exists y \in Y (P(x, y))) \\ &\equiv \exists x \in X \forall y \in Y \neg P(x, y) \end{aligned}$$

であることが分かります.

具体的な例を考えます. 开区間 (a, b) 上の関数

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$$

が与えられているとします. このとき $c \in (a, b)$ で f が連続である必要十分条件は



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in (a, b) (t \in (c - \delta, c + \delta) \Rightarrow f(c) - \varepsilon < f(t) < f(c) + \varepsilon)$$

と定義されます. これを否定すると

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists t \in (a, b) (c - \delta < t < c + \delta \wedge (f(t) \leq f(c) - \varepsilon \vee f(t) \geq f(c) + \varepsilon))$$

となります.

演習 1.16. $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とします. 以下の命題の真偽値を求めましょう.

(1) $\forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)$ (2) $\forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)$

(3) $\exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)$ (4) $\exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)$

演習 1.17. 演習 1.16 の各命題の否定を求めましょう.

章末問題と解答

I 集合 X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$(i) A \subset B \Leftrightarrow (ii) A = A \cap B \Leftrightarrow (iii) B = A \cup B \quad (1.49)$$

II 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1.50)$$

III 命題 P, Q, R に対して以下の同値式を示しましょう.

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad (1.51)$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (1.52)$$

IV 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (1.53)$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \quad (1.54)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad (1.55)$$

V 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとき, X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad (1.56)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad (1.57)$$

VI 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ が与えられているとき, 以下を示しましょう.

(1) f, g が全射ならば $g \circ f$ も全射となる.

(2) f, g が単射ならば $g \circ f$ も単射となる.

(3) $g \circ f$ が全射ならば g も全射となる.

(4) $g \circ f$ が単射ならば f も単射となる.

VII 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとします. Y の部分集合 B に対して X の部分集合

$$f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\}$$

を定義します (B の f による逆像と呼びます). このとき Y の部分集合 B_1, B_2 に対して以下を示しましょう.

(1)

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(2)

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$