

章末問題と解答

I 集合 X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$(i) A \subset B \Leftrightarrow (ii) A = A \cap B \Leftrightarrow (iii) B = A \cup B \quad (1.49)$$

II 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1.50)$$

III 命題 P, Q, R に対して以下の同値式を示しましょう.

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad (1.51)$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (1.52)$$

IV 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (1.53)$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \quad (1.54)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad (1.55)$$

V 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとき, X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad (1.56)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad (1.57)$$

VI 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ が与えられているとき, 以下を示しましょう.

(1) f, g が全射ならば $g \circ f$ も全射となる.

(2) f, g が単射ならば $g \circ f$ も単射となる.

(3) $g \circ f$ が全射ならば g も全射となる.

(4) $g \circ f$ が単射ならば f も単射となる.

VII 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとします. Y の部分集合 B に対して X の部分集合

$$f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\}$$

を定義します (B の f による逆像と呼びます). このとき Y の部分集合 B_1, B_2 に対して以下を示しましょう.

(1)

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(2)

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

I 集合 X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$(i) A \subset B \Leftrightarrow (ii) A = A \cap B \Leftrightarrow (iii) B = A \cup B \quad (1.58)$$

解答

(i) \Rightarrow (ii)

$$A \supset A \cap B$$

が常に成立しますから, $A \subset A \cap B$ を示せば $A = A \cap B$ を示すことができます. さらに $A \subset A$ かつ $A \subset B$ から

$$A \subset A \cap B$$

が従いますから³, (ii) が示せました.

(ii) \Rightarrow (i)

$$B \cap A \subset B$$

が常に成立しますから, $A = A \cap B \subset B$ から $A \subset B$ が従います.

(i) \Rightarrow (iii)

$$B \subset A \cup B$$

が常に成立しますから, $B \supset A \cup B$ を示せば $B = A \cup B$ が示せます. さらに $B \subset B$ かつ $A \subset B$ から $A \cup B \subset B$ が従いますから⁴, (iii) が示せました.

(iii) \Rightarrow (i)

$$A \subset A \cup B$$

が常に成立しますから

$$A \subset A \cup B = B$$

となりますから, $A \subset B$ が示せます.

II 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1.59)$$

³ $A, B, C \subset X$ のとき

$$(A \subset B \text{ かつ } A \subset C) \Rightarrow A \subset B \cap C$$

が成立することを用いています.

⁴ $A, B, C \subset X$ のとき

$$(A \subset C \text{ かつ } B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$$

が成立することを用いています.

この真理表から (P, Q, R) の8通りの真偽の組み合わせにおいて $(P \vee Q) \wedge R$ と $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ の真偽がすべて一致しているので,

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (1.63)$$

であることが分かります.

IV 集合 X の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (1.64)$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \quad (1.65)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad (1.66)$$

解答

(1.64) について

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

(1.65) について

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C) \end{aligned}$$

ここで命題 P, Q, R に対して

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

が成立することを用いています⁵.

(1.66) について

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{aligned}$$

⁵この結果があるのでこの両辺にある命題を $P \wedge Q \wedge R$ と記していいことが分かる.

V 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとき, X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad (1.67)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad (1.68)$$

解答

(1.67) について

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B \ y = f(x) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A \ y = f(x)) \vee (\exists x \in B \ y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

上で以下を用いていることに注意しましょう.

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ と X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して

$$\exists x \in A \cup B \ (P(x)) \equiv (\exists x \in A \ (P(x))) \vee (\exists x \in B \ (P(x)))$$

が成立します.

これがすぐ見えたなら以下の説明は不要ですが, 少し解説しましょう.

まず集合 X 上の命題関数 $P(x)$ と $Q(x)$ に対して

$$\exists x \in X \ (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x \in X \ (P(x))) \vee (\exists x \in X \ (Q(x)))$$

が成立することに注意しましょう. また X の部分集合 A に対して

$$\exists x \in A \ (P(x)) \equiv \exists x \in X \ (x \in A \wedge P(x))$$

も成立します. これを用いると

$$\begin{aligned} \exists x \in A \cup B \ (P(x)) &\equiv \exists x \in X \ (x \in A \cup B \wedge P(x)) \\ &\equiv \exists x \in X \ ((x \in A \vee x \in B) \wedge P(x)) \\ &\equiv \exists x \in X \ ((x \in A \wedge P(x)) \vee (x \in B \wedge P(x))) \\ &\equiv \exists x \in X \ (x \in A \wedge P(x)) \vee \exists x \in X \ (x \in B \wedge P(x)) \\ &\equiv (\exists x \in A \ (P(x))) \vee (\exists x \in B \ (P(x))) \end{aligned}$$

が導けます.

(1.68) について

まず以下の (1.69) を示します.

X の部分集合 $A_1, A_2 \subset X$ に対して

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2) \quad (1.69)$$

が成立します.

実際

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) &\Leftrightarrow \exists x \in A_1 \ y = f(x) \\ &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \exists x \in A_2 \ y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(A_2) \end{aligned}$$

と示せます. ここで (*) において以下を用いています.

集合 X 上の命題関数 $P(x)$ が与えられているときに X の部分集合 A, B が $A \subset B$ を満たすならば

$$(\exists x \in A \ (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in B \ (P(x)))$$

が常に成立します.

最後に (1.68) を示します.

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$$

が常に成立しますから

$$f(A \cap B) \subset f(A), \quad f(A \cap B) \subset f(B)$$

が (1.69) を用いると導けます. これから

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

であることが従います.

VI 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ が与えられているとき, 以下を示しましょう.

- (1) f, g が全射ならば $g \circ f$ も全射となる.
- (2) f, g が単射ならば $g \circ f$ も単射となる.
- (3) $g \circ f$ が全射ならば g も全射となる.
- (4) $g \circ f$ が単射ならば f も単射となる.

解答

(1) 任意の $z \in Z$ をとります. g が全射なので $\exists y \in Y$ が存在して

$$z = g(y)$$

が成立します. f が全射なので, この $y \in Y$ に対して $\exists x \in X$ が存在して

$$y = f(x)$$

が成立します. このとき

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

が成立します. よって $g \circ f$ は全射であることが分かります.

(2) $x, x' \in X$ に対して

$$g \circ f(x) = g \circ f(x') \quad \text{すなわち} \quad g(f(x)) = g(f(x'))$$

が成立するとします. g が単射なので

$$f(x) = f(x')$$

が成立します. さらに f が単射なので

$$x = x'$$

が従います. よって $g \circ f$ は単射であることが分かります.

(3) $g \circ f$ が全射なので $\forall z \in Z$ に対して $\exists x \in X$ が存在して

$$z = g \circ f(x) = g(f(x))$$

が成立します. ここで $f(x) \in Y$ なので g が全射であることが分かります.

(4) $x, x' \in X$ に対して $f(x) = f(x')$ が成立すると仮定します. このとき

$$g(f(x)) = g(f(x')) \quad \text{すなわち} \quad g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

が従います. ここで $g \circ f$ が単射であることを用いると

$$x = x'$$

となります. よって f は単射であることが示されました.

VII 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとします. Y の部分集合 B に対して X の部分集合

$$f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\}$$

を定義します (B の f による逆像と呼びます). このとき Y の部分集合 B_1, B_2 に対して以下を示しましょう.

(1)

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(2)

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

解答 (1)

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\&\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\&\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\end{aligned}$$

から

$$\text{(交換則)} \quad P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad P \vee Q \equiv Q \vee P$$

が分かります.

(1.5)

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

から

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

であることが分かります. 他方

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

から

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

であることが分かります.

(1.6), (1.7) は章末問題 III です.

演習 1.3

P	$\neg(P)$	$\neg(\neg(P))$
T	F	T
F	T	F

から 2 重否定の法則

$$\neg(\neg(P)) \equiv P$$

が成立することが分かります.

演習 1.4

P	Q	$P \vee Q$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

から

$$P \Rightarrow (P \vee Q)$$

がトートロジーであることが分かります.

演習 1.5 (1.13)

P	$P \Rightarrow P$
T	T
F	T

から

$$P \Rightarrow P$$

がトートロジーであることが分かります (同一律).

(1.15)

P	$\neg(P)$	$P \wedge \neg(P)$	$\neg(P \wedge \neg(P))$
T	F	F	T
F	T	F	T

から

$$\neg(P \wedge \neg(P))$$

がトートロジーであることが分かります (矛盾律).

演習 1.6

$$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \quad (1.70)$$

の真偽について真理表を作ります.

P	Q	R	$*_1 := (Q \Rightarrow R)$	$*_2 := (P \Rightarrow *_1)$	$*_3 := P \Rightarrow Q$	$*_2 \wedge *_3$	$P \Rightarrow R$	(1.70)
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

から (1.70) がトートロジーであることが分かります.

または以下のように同値式として変形して示すこともできます.

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &\stackrel{(*)}{\equiv} [P \Rightarrow \{Q \wedge (Q \Rightarrow R)\} \Rightarrow (P \Rightarrow R)] \\
 &\stackrel{(**)}{\equiv} [P \Rightarrow (Q \wedge R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
 &\equiv [(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
 &\equiv \neg(P \Rightarrow Q) \vee \neg(P \Rightarrow R) \vee (P \Rightarrow R)
 \end{aligned}$$

において最右辺はトートロジーとなります. 実際, 命題 Q, R に対して

$$Q \vee \neg(R) \vee R$$

は任意の Q に対して真になります. 以上で与式がトートロジーであることが分かります.

上で (*) において, 同値式

$$(P \Rightarrow Q_1) \wedge (P \Rightarrow Q_2) \equiv (P \Rightarrow (Q_1 \wedge Q_2))$$

が成立することを, (**) において同値式

$$Q \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv Q \wedge R$$

が成立することを用いていることに注意しましょう.

演習 1.7

P	Q	R	$\#_1 := (P \Rightarrow Q)$	$\#_2 := (Q \Rightarrow R)$	$\#_1 \wedge \#_2$	$P \Rightarrow R$	(1.21)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

から (1.21) がトートロジーであることが分かります.

演習 1.8 章末問題 II です.

演習 1.9 章末問題 IV にあります.

演習 1.10 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned}(h \circ g) \circ f(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h \circ (g \circ f)(x) &= h(g \circ f(x)) \\ &= h(g(f(x)))\end{aligned}$$

から

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x)$$

であることが分かります. これは

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

を意味します.

演習 1.11 例えば $X = \mathbf{R}$ 上の命題関数

$$P(x): x > -1$$

$$Q(x): x < 1$$

が反例となります.

演習 1.12

$$\begin{aligned}
\exists x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) &\equiv \exists x \in X (\neg(P(x)) \vee Q(x)) \\
&\equiv \exists x \in X (\neg(P(x))) \vee \exists x \in X (Q(x)) \\
&\equiv (\forall x \in X (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X (Q(x)))
\end{aligned}$$

演習 1.13

$$\begin{aligned}
(1.42) \stackrel{(*)}{\equiv} \neg(\exists x \in X (P(x)) \wedge \exists x \in X (Q(x))) &\Rightarrow \neg(\exists x \in X (P(x) \wedge Q(x))) \\
&\stackrel{(**)}{\equiv} (\forall x \in X (\neg P(x)) \vee \forall x \in X (\neg Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X ((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x)))
\end{aligned}$$

において, (1.40) から最右辺が真であることが分かりますから, (1.42) が真であることが従います.

演習 1.14

$$\begin{aligned}
\forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) &\Rightarrow ((\forall x \in X (P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X (Q(x)))) \\
&\stackrel{(i)}{\equiv} (\forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \in X (P(x))) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x)) \\
&\equiv \forall x \in X ((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (P(x))) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x)) \\
&\stackrel{(ii)}{\equiv} \forall x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x)) \\
&\equiv (\forall x \in X (P(x)) \wedge \forall x \in X (Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x))
\end{aligned}$$

となります. 最右辺が常に真となるのは, 一般に命題 P, Q に対して

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

が常に真となることから容易に示せます. 上で (i) は同値式

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R \tag{1.71}$$

を用いました. 他方 (ii) では恒等式

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q \tag{1.72}$$

を用いました.

演習 1.15 同値式

$$\begin{aligned}
& \forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in X (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X (Q(x)))) \\
& \equiv \forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\neg(\exists x \in X (Q(x)))) \Rightarrow (\neg(\exists x \in X (P(x)))))) \\
& \equiv \forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(P(x))) \\
& \equiv (\forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \in X \neg(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(P(x))) \\
& \equiv \forall x \in X ((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(P(x))) \\
& \equiv \forall x \in X ((\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)) \wedge \neg(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(P(x))) \\
& \equiv \forall x \in X ((\neg Q(x)) \wedge (\neg P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(P(x))) \\
& \equiv (\forall x \in X (\neg Q(x)) \wedge \forall x \in X (\neg P(x))) \Rightarrow \forall x \in X (\neg P(x))
\end{aligned}$$

の最右辺が常に真であることが容易に示せます。

演習 1.16 右の表から

$$\begin{aligned}
\forall y \in Y (x^2 + y < 20) & \equiv (x = 1, 2, 3) \\
\exists y \in Y (x^2 + y < 20) & \equiv (x = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

であることが分かります。従って各命題の真偽が以下のように求められます。

$y \setminus x$	1	2	3	4	5	
(1) $\forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv F$	1	2	5	10	17	26
(2) $\forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv F$	2	3	6	11	18	27
(3) $\exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv T$	3	4	7	12	19	28
(4) $\exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv T$	4	5	8	13	20	29
	5	6	9	14	21	30

演習 1.17 (1)

$$\neg(\forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)) \exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y \geq 20)$$

(2)

$$\neg(\forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)) \exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y \geq 20)$$

(3)

$$\neg(\exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)) \forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y \geq 20)$$

(4)

$$\neg(\exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)) \forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y \geq 20)$$