第2章　複素数と代数学の基本定理

以下では $\mathbf{K}$ で $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ を表します．また $\mathbf{K}[x]$ は $\mathbf{K}$ を係数とする多項式全体の集合を表します.

2.3　多項式

2.3.3　多項式の次数

1. $P(x) \in \mathbf{K}[x]$ が $P(x) \neq 0$ であるとします.

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbf{K}(j = 0, \cdots, n), a_n \neq 0 \tag{2.1}$$

とします．このとき P の次数として

$$\deg(P) = n$$

と定めます.

2. $P(x) \in \mathbf{K}[x]$ が $P(x) = 0$ であるとします．このとき

$$\deg(P) = -\infty$$

と定めます.

3. $P, Q \in \mathbf{K}[x]$ のとき

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

が成立します．これは P が (2.1)

$$Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,\ b_k \in \mathbf{K}(k = 0, \cdots, m), b_m \neq 0 \tag{2.2}$$

で与えられているとき

$$(P \cdot Q)(x) = a_n b_m x^{m+n} + \cdots + c_\ell x^\ell + \cdots + c_1 x + c_0$$

$$c_\ell = \sum_{i+j=\ell} a_i b_j$$

となることから示せます.

4. **（剰余定理）**

定理 2.1. $P, D \in \mathbf{K}[x]$ で $\deg(D) \geq 1$ とします．このとき

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

$$\deg(R(x)) < \deg(D(x))$$

を満たす $Q(x), R(x) \in \mathbf{K}[x]$ がただ一つ存在します.

Proof. **（存在）**　**(i)** $\deg(P) < \deg(D)$ の場合

$$P(x) = 0 \cdot D(x) + P(x),\ \deg(P(x)) < \deg(D(x))$$

となりますから，$Q(x) = 0,\ R(x) = P(x)$ として成立します.

(ii) $n = \deg(P) \geq \deg(D) = m$ の場合を考えます．帰納法を用いるとして，$\deg(P) \leq n-1$ の場合は定理（存在について）が示されているとします.

$$D(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,\ b_k \in \mathbf{K}(k = 0, \cdots, m), b_m \neq 0$$

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbf{K}(j = 0, \cdots, n), a_n \neq 0$$

とします．ここで

$$S(x) := P(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} D(x)$$

とすると

$$\deg(S(x)) \leq n - 1$$

となります．帰納法の仮定を用いると

$$S(x) = Q_1(x)D(x) + R(x), \quad \deg(R(x)) < \deg(D(x))$$

を満たす $Q_1,\ R \in \mathbf{K}[x]$ が存在します．このとき

$$P(x) = (a_n b_m x^{n-m} + Q_1(x))D(x) + R(x)$$

より

$$Q(x) = a_n b_m x^{n-m} + Q_1(x)$$

として定理（存在について）が成立することが分かります.

(一意性)

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) = Q_0(x)D(x) + R_0(x)$$

$$\deg(R(x)) < \deg(D(x)),\ \deg(R_0(x)) < \deg(D_0(x))$$

が成立するとします．このとき

$$(Q(x) - Q_0(x))D(x) = R_0(x) - R(x)$$

が成立しますが，$R \neq R_0$ とすると $Q(x) - Q_0(x) \neq 0$ が従います[1]．このことから

$$\deg(D) > \deg(R_0 - R_1) = \deg(Q - Q_0) + \deg(D) \geq \deg(D)$$

から矛盾が生じます．よって $R = R_0$ が導かれます．さらに $D \neq 0$ から $Q = Q_0$ も従います．□

定理 2.1（剰余定理）を用いると次の定理 2.2（因数定理）を証明できます．

定理 2.2.（因数定理） $P(x) \in \mathbf{K}[x]$, $\alpha \in$ ‘K のとき

$$P(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - \alpha \text{は} P(x) \text{を割切ります}$$

Proof. （⇒ ）$P(x)$ を $x - \alpha$ で割ります．すなわち

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + \beta$$

を満たす $Q(x) \in \mathbf{K}[x]$, $\beta \in \mathbf{K}$ が存在します．この両辺に $x = \alpha$ を代入すると

$$0 = P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + \beta = \beta$$

から $\beta = 0$ が分かりますから，$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ が導けます．
（⇐ ）これは明らかでしょう．□

定理 2.2（因数定理）の応用として次の定理 2.3 を証明します．

定理 2.3. $P(x) \in \mathbf{K}[x]$ が n 次以下とします．そして $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbf{K}$ が条件

$$\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j),\ P(\alpha_i) = 0 \ (1 \leq i \leq n + 1)$$

を満たすとします．このとき

$$P(x) = 0$$

が成立します．

Proof. 因数定理によって $P(\alpha_1) = 0$ から

$$P(x) = (x - \alpha_1)P_1(x)$$

を満たす $P_1(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在します．さらに $P(\alpha_2) = 0$ と $\alpha_1 \neq \alpha_2$ が成立しますから

$$0 = P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)P_1(\alpha_2)$$

[1] $P_1, P_2 \in \mathbf{K}[x]$ において $P_1P_2 = 0$ ならば $P_1 = 0$ または $P_2 = 0$ となることを用いています．

から $P_1(\alpha_2) = 0$ が従います．よって因数定理を用いると

$$P_1(x) = (x - \alpha_2)P_2(x),\ 従って\ P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)P_2(x)$$

を満たす $P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在することが分かります．このプロセスを繰り返します．すなわち，いま $i \leq n-1$ を満たす i に対して

$$P(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_i)P_i(x)$$

を満たす $P_i(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在するとします．$x = \alpha_{i+1}$ を代入すると

$$0 = P(\alpha_{i+1}) = (\alpha_{i+1} - \alpha_1)\cdots(\alpha_{i+1} - \alpha_i)P_i(\alpha_{i+1})$$

が従います．さらに $\alpha_{i+1} \neq \alpha_k$ $(k = 1, \cdots, i)$ から

$$P_i(\alpha_{i+1}) = 0$$

を得ます．よって因数定理から

$$P_i(x) = (x - \alpha_{i+1})P_{i+1}(x)\ 従って\ P(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_{i+1})P_{i+1}(x)$$

を満たす $P_{i+1}(x) \in \mathbf{K}[x]$ が存在することが分かります．特に $i = n-1$ のとき

$$P(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)P_n(x)$$

となります．この両辺の次数を考えると

$$n \geq \deg(P) = n + \deg(P_n)$$

から

$$\deg(P_n) \leq 0$$

が分かります．すなわち $P_n(x) = \alpha \in \mathbf{K}$ であることが導かれました．

$$P(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)\alpha$$

に $x = \alpha_{n+1}$ を代入すると

$$0 = P(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1} - \alpha_1)\cdots(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\alpha$$

から $\alpha = 0$ であることがが結論できます．以上で $P(x) = 0$ であることが証明できました．

□

2.4　ユークリッドの互除法

定理 2.1（剰余定理）の応用として，2 つの多項式 $f(x), g(x) \in \mathbf{K}[x]$ の最大次数の共通因子を求める**ユークリッドの互除法**を解説します．以下のように割り算を繰り返します．

$f(x)$ を $g(x)$ で割るとき	商：$q_1(x)$	剰余：$r_1(x)$
$g(x)$ を $r_1(x)$ で割るとき	商：$q_2(x)$	剰余：$r_2(x)$
$r_1(x)$ を $r_2(x)$ で割るとき	商：$q_3(x)$	剰余：$r_3(x)$
$r_2(x)$ を $r_3(x)$ で割るとき	商：$q_4(x)$	剰余：$r_4(x)$
	$\vdots$	
$r_{k-2}(x)$ を $r_{k-1}(x)$ で割るとき	商：$q_k(x)$	剰余：$r_k(x)$
	$\vdots$	

とします．このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)g(x) + r_1(x) \\ g(x) &= q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) &= q_3(x)r_2(x) + r_3(x) \\ &\vdots \\ r_{k-2}(x) &= q_k(x)r_{k-1}(x) + r_k(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

となります．剰余の次数に着目すると

$$\deg(r_1) > \deg(r_2) > \deg r_3 > \cdots$$

と 1 以上小さくなっていきますから，ある時点で

$$\deg(r_k) = 0 \quad \text{または} \quad \deg(r_k) = -\infty$$

となります．
$\underline{\deg(r_k) = 0}$のときは，$r_k = c \neq 0$ と $c \in \mathbf{K}$ が最大次数の共通因子となりますから f と g は互いに素であることが分かります．
$\underline{\deg(r_k) = -\infty}$のときは，$r_k = 0$ となりますから $r_{k-1}(x)$ が f と g の最大次数の共通因子となります．

演習問題

I $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

を示しましょう.

II (1) $a, b \in \mathbf{R}$ が $a, b \geq 0$ を満たすとします.

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

を示しましょう.

(2) $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$ が

$$a_1, \cdots, a_n \geq 0$$

を満たすとします.

$$a_1 + \cdots + a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$$

が成立することを示しましょう.

III (1) $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

を示しましょう.

(2) $z \in \mathbf{C},\ z \neq 0$ のとき

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

を示しましょう.

(3) $z \in \mathbf{C}$ であるとき

$$z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

を示しましょう.

(4) 実係数の多項式

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

を考えます. すなわち上の式において

$$a_0, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$$

とします. このとき $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\overline{\alpha}) = 0$$

を示しましょう.

IV $P_1(x), P_2(x) \in \mathbf{K}[x]$ に対して

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = 0 \Rightarrow P_1(x) = 0 \text{ または } P_2(x) = 0$$

であることを示しましょう.

V $z, w \in \mathbf{C}$ が $z, w \neq 0$ を満たしているとします.

$$z = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad w = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

と極形式で表されるとき

$$zw = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z^{-1} = r_1^{-1}(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$$

となることを示しましょう.

VI

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \neq 1$$

であるとき

$$z^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$$

とします. このとき

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - 1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})}$$

であることを用いて

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta, \quad \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta$$

を求めましょう.

VII(1) $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\alpha \neq \gamma$ とします. このとき

$$g(x) = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

が

$$g(\alpha) = 1, \quad g(\beta) = g(\gamma) = 0$$

を満たすことを示しましょう.

(2) (1) において $A, B, C \in \mathbf{C}$ とします. f が 2 次多項式で

$$f(\alpha) = A,\ f(\beta) = B,\ f(\gamma) = C$$

ならば

$$f(x) = A\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + B\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + C\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

となることを示しましょう.

VIII $a, b \in \mathbf{R}$ とします.

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - bx - b$$

において

$$f(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$$

とします.
(1) a, b を求めましょう.
(2) f の他の根を求めましょう.

IX

$$f(x) = x^{2n} + x^n + 1$$

が $x^2 + x + 1$ で割り切れるか調べましょう.

X

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

とします.
(1) $z^n - 1 = 0$ の解が $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$ であることを示しましょう.
(2)

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1}) = n$$

となることを示しましょう.

XI 以下の多項式 $f(x)$, $g(x)$ の最大共通因子を最高次数の係数が 1 として求めまし ょう.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = 4x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 11x + 3$$

XII $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$ を満たす $z \in \mathbf{C}$ をすべて求めましょう.
XIII $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ が $ad - bc \neq 0$ を満たすとする．$\mathbf{C}$ の部分集合 D を

$$D = \begin{cases} \mathbf{C} & (c = 0 \text{のとき}) \\ \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & (c \neq 0 \text{のとき}) \end{cases}$$

とします．写像

$$f:\ D \to \mathbf{C} \quad z \mapsto w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

によって定義する.
(1) f が単射であることを示しましょう.
(2) $f(D)$ を求めましょう.
(3) 全単射 $f:\ D \to f(D)$ の逆写像 f^{-1} を求めましょう.

XIV $\mathbf{C}$ の部分集合 $D := \mathbf{C} \setminus \{i\}$ 上で定義された写像

$$f:\ D \to \mathbf{C} \quad z \mapsto w = f(z) = \frac{1-iz}{1+iz}$$

について考えます.
(1) $f(D) \subset \mathbf{C} \setminus \{-1\}$ であることを示しましょう.
(2) $f(D) = \mathbf{C} \setminus \{-1\}$ であることを示しましょう.
(3) f が単射であることを示しましょう.
(4) 全単射 $f:\ D \to f(D)$ の逆写像を求めましょう.
(5) $A = \{z \in D;\ |z-(1+i)| = 1\}$ に対して $f(A)$ を求めましょう.
(6) $f(\mathbf{R})$ を求めましょう.
XV 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ を差分方程式

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \quad a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

によって定義します. a_n を求めましょう. ただし解が最終的に虚数単位を含まないものにしましょう.