演習問題解答

演習 3.2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

に対して，以下を求めましょう．
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積．
(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交する単位ベクトル．
(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}, \vec{c}$ が張る平行六面体の体積．

解答 (1)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となりますから $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 S は

$$S = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = \sqrt{3}$$

(2) $\vec{a} \times \vec{b}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直ですから，大きさを 1 にした

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める単位ベクトルです．
(3) 求める体積を V にすると

$$V = abs \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

となります．他方

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

から $V = 4$ であることが分かります．

演習 3.3

$$||\vec{x} \pm \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \tag{3.26}$$

を示しましょう.

解答

$$\begin{aligned} ||\vec{x} + \vec{y}||^2 &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \quad ((3.27)\text{ から}) \\ &= (\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \quad ((3.10)\text{ から}) \\ &= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) \quad ((3.11)\text{ から}) \\ &= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \quad ((3.12)\text{ から}) \\ &= ||\vec{x}||^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \quad ((3.13)\text{ から}) \end{aligned}$$

ここで $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{x}||^2 = (\vec{x}, \vec{x}) \tag{3.27}$$

が成立することを用いています.

演習 3.4 以下の補助定理を用いて

$$\left| \begin{array}{ccc} \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{array} \right| = \lambda \left| \begin{array}{ccc} \vec{\alpha} & \vec{b} & \vec{c} \end{array} \right| + \mu \left| \begin{array}{ccc} \vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{array} \right| \tag{3.28}$$

を示しましょう.

補助定理 $F:\ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \quad \vec{x} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ は

$$F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします.

解答

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

が成立しますから

$$F(\vec{x}) = |\vec{x}\ \vec{b}\ \vec{c}|$$

と定めると

$$C_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

に対して

$$F(\vec{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$

となります．従って補助定理から

$$\begin{aligned}|\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}\ \vec{b}\ \vec{c}| &= F(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}) \\ &= \lambda F(\vec{\alpha}) + \mu F(\vec{\beta}) \\ &= \lambda|\vec{\alpha}\ \vec{b}\ \vec{c}| + \mu|\vec{\beta}\ \vec{b}\ \vec{c}|\end{aligned}$$

となります．

演習 3.5 次の行列式の値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -12 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)((c+a)-(b+a)) \\ &= (a-b)(c-a)(b-c) \end{aligned}$$

演習 3.6

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{I}) = (1) \times c_2 - (2) \times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{II}) = (1) \times c_3 - (3) \times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{III}) = (2) \times c_3 - (3) \times c_2$$

において $a_1 \times (III) - a_2 \times (II) + a_3 \times (I)$ を計算して，クラメールの公式の y の公式を導きましょう.

解答

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \cdots (\mathrm{I})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots (\mathrm{II})$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots (\mathrm{III})$$

において $a_1 \times (\mathrm{III}) - a_2 \times (\mathrm{II}) + a_3 \times (\mathrm{I})$ を計算すると

$$\begin{aligned} &\left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) x \\ &\quad + \left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) y \\ &= -a_3 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となりますが，第 2 列の余因子展開と考えると

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_1 & c_1 \\ \alpha_2 & a_2 & c_2 \\ \alpha_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

から

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となります．これから $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| \neq 0$ を用いて

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

が導けます．

演習 3.7 次の連立 1 次方程式をクラメールの公式を用いて解きましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて

$$x = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{49}{10}$$

$$y = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$z = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて,

$$x = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$z = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$