演習問題

I $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{a},\vec{c})$$

が成立することを示しましょう．(「線型代数学」旧教科書 13 ページ，新教科書 12 ページ，演習 1.17)

II $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a},\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう．(「線型代数学」教科書 13 ページ，演習 1.19，新教科書では演習 1.20)

III $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします．

(1)

$$||x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2||^2 = x^2 + y^2$$
$$||x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 + z\vec{f}_3||^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

を示しましょう．

(2) $\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{g} - x\vec{f}_1 - y\vec{f}_2||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g},\vec{f}_1) - 2y(\vec{g},\vec{f}_2)$$

が成立することを示しましょう．

IV

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

を満たす (x, y, z) に対してクラメールの公式を用いて x, y を z で表しましょう．

V

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a} - t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう．

VI

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ であることを示しましょう.

(2) $||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$ を最小にする x, y を求めましょう.

VII

(1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}$ が作る平行四辺形の面積は

$$||\vec{a} \times \vec{b}||$$

であることを示しましょう．また

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

であることを示しましょう.

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が作る平行四面体の体積は

$$|(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|$$

であることを示しましょう.

VIII $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします．このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

が成立することを示しましょう.

IX

直線 ℓ_1

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

直線 ℓ_2

$$\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 3x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

があります．原点を通り直線 ℓ_1, ℓ_2 に交わる直線を求めましょう.

X 次の 3 点を通る平面の方程式を求めましょう.

(1) $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$

(2) $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 4)$

(3) $(1, 2, 3)$, $(-1, -1, 0)$, $(2, -3, 5)$

XI $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．平面

$$ax + by + cz + q = 0$$

と点 (x_0, y_0, z_0) の距離 δ は

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となることを示しましょう.

I $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{a},\vec{c})$$

が成立することを示しましょう.（「線型代数学」旧教科書 13 ページ，新教科書 12 ページ，演習 1.17）

解答　公式

$$||\vec{a}+\vec{b}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + ||\vec{b}||^2$$

を用います.

$$\begin{aligned}
||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 &= ||\vec{a}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) + ||\vec{b}+\vec{c}||^2 \\
&= ||\vec{a}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{a},\vec{c}) + ||\vec{b}||^2 + 2(\vec{b},\vec{c}) + ||\vec{c}||^2 \\
&= ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{c},\vec{a})
\end{aligned}$$

II $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a},\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう.（「線型代数学」教科書 13 ページ，演習 1.19，新教科書では演習 1.20）

解答 $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とします．他方 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると $0 < \theta < \pi$ が成立します．このとき

$$S = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta$$

となります．さらに

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{(\vec{a},\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2}} = \frac{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

と変形します．ここで最右辺の分子を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成分で表すと

$$\begin{aligned}
\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2} &= \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2} \\
&= \sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} = |a_1b_2 - a_2b_1| = \left| |\vec{a}\ \vec{b}| \right|
\end{aligned}$$

となります．以上をまとめると

$$S = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \frac{\left| |\vec{a}\ \vec{b}| \right|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \left| |\vec{a}\ \vec{b}| \right|$$

と示すべき等式が成立します.

III $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3} \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f_i}, \vec{f_j}) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします.

(1)

$$||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 = x^2 + y^2$$

$$||x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

を示しましょう.

(2) $\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2}||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2})$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned} ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 &= ||x\vec{f_1}||^2 + 2(x\vec{f_1}, y\vec{f_2}) + ||y\vec{f_2}||^2 \\ &= x^2||\vec{f_1}||^2 + 2xy(\vec{f_1}, \vec{f_2}) + y^2||\vec{f_2}||^2 \\ &= x^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 0 + y^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}||^2 &= ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}|| + 2(x\vec{f_1} + y\vec{f_2}, z\vec{f_3}) + ||z\vec{f_3}||^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2xz(\vec{f_1}, \vec{f_3}) + 2yz(\vec{f_2}, \vec{f_3})z^2 \cdot 1 \\ &= x^2 + y^2 + 2xz \cdot 0 + 2yz \cdot 0 + z^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

解答 (2)

$$\begin{aligned} ||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2}||^2 &= ||\vec{g}||^2 - 2(\vec{g}, x\vec{f_1} + y\vec{f_2}) + ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 \\ &= ||\vec{g}||^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2}) + x^2 + y^2 \\ &= ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2}) \end{aligned}$$

注意 さらに

$$\begin{aligned} &||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2}) \\ &= \Big(x - (\vec{g}, \vec{f_1})\Big)^2 + \Big(y - (\vec{g}, \vec{f_2})\Big)^2 + ||\vec{g}||^2 - (\vec{g}, \vec{f_1})^2 - (\vec{g}, \vec{f_2})^2 \end{aligned}$$

から $||\vec{g}-x\vec{f_1}-y\vec{f_2}||^2$ は $x=(\vec{g},\vec{f_1}), y=(\vec{g},\vec{f_2})$ において最小値 $||\vec{g}||^2-(\vec{g},\vec{f_1})^2-(\vec{g},\vec{f_2})^2||$ をとることが分かります.

IV

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$$

を満たす (x,y,z) に対してクラメールの公式を用いて x,y を z で表しましょう.

解答

$$\begin{cases} x+y & = & z+1 \\ 2x-y & = & -z-1 \end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて x,y について解くと

$$x=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1 \\ 2 & -1\end{vmatrix}}\cdot\begin{vmatrix}z+1 & 1 \\ -z-1 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot 0$$

$$y=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1 \\ 2 & -1\end{vmatrix}}\cdot\begin{vmatrix}1 & z+1 \\ 2 & -z-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}(-3z-3)=z+1$$

V

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1 \\ 2 \\ -3 \\ 4\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1 \\ -1 \\ -1 \\ 1\end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a}-t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう.

解答

$$||\vec{a}||^2=1+4+9+16=30,\quad (\vec{a},\vec{b}=1+(-2))+3+4=6,\quad ||\vec{b}||^2=1+1+1+1=4$$

となります.

$$\begin{aligned} ||\vec{a}-t\vec{b}||^2 &= ||\vec{a}||^2-2t(\vec{a},\vec{b})+t^2||\vec{b}||^2 \\ &= 4t^2-12t+30 \\ &= 4\left(t-\frac{3}{2}\right)+30-9=4\left(t-\frac{3}{2}\right)+21 \end{aligned}$$

から

$$t = \frac{3}{2} \quad \text{のとき最小値} \quad 21$$

をとります.

VI

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ であることを示しましょう.

(2) $||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$ を最小にする x, y を求めましょう.

解答 (1)

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0$$

(2)

$$\begin{aligned}
||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2 &= ||\vec{g}||^2 - 2(\vec{g}, x\vec{a} + y\vec{b}) + ||x\vec{a} + y\vec{b}||^2 \\
&= ||\vec{g}||^2 - 2(\vec{g}, x\vec{a} + y\vec{b}) + x^2||\vec{a}||^2 + y^2||\vec{b}||^2 \\
&= 1 - 2x + 2y + 3x^2 + 6y^2 \\
&= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\
&= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

において最後の等号成立条件は $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{6}$ であるので $||\vec{g} - x\vec{a} - \vec{b}||^2$ は

$$x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{6} \quad \text{のとき} \quad \text{最小値}\frac{1}{2}$$

をとります.

問題 VII については教科書の 3.3.2 節（65 ページ付近）を読んでください.

VIII $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします．このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

とします．このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

さらに $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a}$ から $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ が従います．

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}
\end{aligned}$$

IX
直線 ℓ_1

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x-2y+z+5=0 \end{cases}$$

直線 ℓ_2

$$\begin{cases} x-z+1=0 \\ 3x+2y-z+2=0 \end{cases}$$

があります．原点を通り直線 ℓ_1, ℓ_2 に交わる直線を求めましょう．

解答直線 ℓ_1 と原点を含む平面 π_1 は

$$5(x+y+z+1)-(3x-2y+z+5)=0 \quad \text{すなわち} \quad 2x+7y+4z=0 \tag{1}$$

他方，直線 ℓ_2 と原点を含む平面 π_2 は

$$2(x-z+1)-(3x+2y-z+2)=0 \quad \text{すなわち} \quad -x-2y-z=0 \tag{2}$$

であることが分かります．π_1 と π_2 の交わりは (1) かつ (2) を解いて

$$x=\frac{1}{3}z, \quad y=-\frac{2}{3}z \tag{3}$$

となる．この直線を ℓ とすると，ℓ が求める直線である．実際 ℓ_1 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は π_1 に平行で

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が成立しますから π_1 中 ℓ_1 と ℓ は交わります．他方，ℓ_2 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は π_2 に平行で

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が成立しますから π_2 中 ℓ_2 と ℓ は交わります．よって ℓ は原点を通り，ℓ_1 と ℓ_2 と交わります．

X 次の 3 点を通る平面の方程式を求めましょう．
(1) $(0,0,0)$, $(1,2,3)$, $(4,5,6)$
(2) $(2,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,4)$
(3) $(1,2,3)$, $(-1,-1,0)$, $(2,-3,5)$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ であるので，求める平面の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

であることが分かります．
(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

は平面を表して，与えられた 3 点を通るので，これが求める方程式となります．
(3)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix} -21 \\ 1 \\ 13 \end{smallmatrix}\right)$ であることが分かります．これから求める平面の方程式は

$$-21(x-1) + (y-2) + 13(z-3) = 0$$

となります.

XI $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．平面

$$ax + by + cz + q = 0$$

と点 (x_0, y_0, z_0) の距離 δ は

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となることを示しましょう.

解答 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り方向ベクトルが $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ の直線 ℓ と平面

$$\pi:\ ax + by + cz + q = 0 \tag{1}$$

の交点 P_1 の座標を求めます．直線 ℓ の上の点の座標は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \\ z_0 + ct \end{pmatrix}$$

となりますから，(1) に代入して

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + q = 0$$

から

$$t = -\frac{az_0 + by_0 + cz_0 + q}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{3.18}$$

であることが分かります．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

なので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}\right| = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であることが分かります.