

演習問題

I 次の行列の積を計算しましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ によって定義します。 $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう。

III (1) 座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

によって

$$z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$$

を ξ, η で表しましょう。

(2) (1) を用いて z の最小値を求めましょう。

IV

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$$

に対して、平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう。

V 次の行列の逆行列を求めましょう。

$$(1) A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (7) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

VI

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して、平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう。

VII $a > 0, ab - c^2 > 0$ のとき

$$ax^2 + 2cxy + by^2 > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

が成立することを示しましょう。

VIII $A = (\vec{a} \ \vec{b})$ は2次正方行列であるとしします。

$$\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が全射としします。このとき $|A| = |\vec{a} \ \vec{b}| \neq 0$ が成立することを証明しましょう。

I 次の行列の積を計算しましょう.

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答

(1)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \lambda \vec{a} + \vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda \vec{a} \ \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b} \ \vec{a})$$

II $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ によって定義します. $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{\alpha} \ \vec{\beta}), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{w}) &= (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}, \vec{w}) = x(\vec{\alpha}, \vec{w}) + y(\vec{\beta}, \vec{w}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

となる. 他方

$${}^tA\vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha} \\ {}^t\vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha}\vec{w} \\ {}^t\vec{\beta}\vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix}$$

から

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{w} \right) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が従います.

III (1) 座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

によって

$$z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$$

を ξ, η で表しましょう。

(2) (1) を用いて z の最小値を求めましょう。

解答

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \end{cases}$$

から

$$x + y = \sqrt{2}\xi, \quad xy = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$$

となります。従って

$$\begin{aligned} z &= (x + y)^2 - xy - x - 2y \\ &= 2\xi^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \\ &= \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\eta \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

から $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, すなわち $x = 0, y = 1$ のとき z は最小値 -1 をとります。

IV

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$$

に対して、平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう。

解答 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

と表現できます。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

と展開できます。ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

となります。ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

から

$$z = \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \frac{7}{3}$$

となります。

V 次の行列の逆行列を求めましょう.

$$(1) A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (7) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

解答

$$(1) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

となります.

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(7) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

VI

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して、平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう。

解答 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 32$$

と表現できます。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

と展開できます。ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

となります。ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 &= \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + 32 = -6 \end{aligned}$$

から

$$z = \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - 6$$

となります。

VII $a > 0, ab - c^2 > 0$ のとき

$$ax^2 + 2cxy + by^2 > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

が成立することを示しましょう。

解答

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a \left(x + \frac{c}{a}y \right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2$$

となります。ここで $a > 0, ab - c^2 > 0$ から

$$a \left(x + \frac{c}{a}y \right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0$$

であることが分かります。さらにこの不等式における等号成立の必要十分条件は

$$a \left(x + \frac{c}{a}y \right)^2 = 0, \quad \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$$

すなわち

$$x + \frac{c}{a}y = y = 0 \quad \text{i.e.} \quad x = y = 0$$

ですから、 $x \neq 0$ または $y \neq 0$ が成立するとき

$$a \left(x + \frac{c}{a}y \right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 > 0$$

となります。

VIII $A = (\vec{a} \ \vec{b})$ は2次正方行列であるとしませう。

$$\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が全射とします。このとき $|A| = |\vec{a} \ \vec{b}| \neq 0$ が成立することを証明せませう。

解答 主張の対偶, すなわち $|A| = |\vec{a} \ \vec{b}| = 0$ ならば φ が全射でないことを証明せませう。もし $A = O_2$ ならば $\text{Im}(\varphi) = \{\vec{0}\}$ となりますから, φ は全射でないことが分かります。以下では $A \neq O_2$ であると仮定せませう。 $|\vec{a} \ \vec{b}| = 0$ から $\vec{a} \parallel \vec{b}$ すなわち, ある $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在して

$$c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} = \vec{0}$$

が成立せませう。以下 $c_1 \neq 0$ の場合を考えせませう。このとき

$$\vec{a} = -\frac{c_2}{c_1} \vec{b}$$

が成立せませう。もし $\vec{b} = \vec{0}$ ならば $\vec{a} = \vec{0}$ となりますから, $A = O_2$ となります。従って $\vec{b} \neq \vec{0}$ であることが分かります。このとき $\vec{c} \neq \vec{0}$ で $\vec{b} \parallel \vec{c}$ を満たすものが存在せませう。

ここでもし φ が全射であるとすると

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x \vec{a} + y \vec{b} = \vec{c}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ が存在せませう。このとき

$$\vec{c} = x \cdot \left(-\frac{c_2}{c_1} \right) \vec{b} + y \vec{b} = \left(-\frac{x c_2}{c_1} + y \right) \vec{b}$$

となりますから $\vec{b} \parallel \vec{c}$ となって矛盾が生じせませう。よって φ が全射ではあり得ないことが示されせませう。

注意 解答で証明をしないで用いたことについて注意せませう。 $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ のとき

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = b_2 \neq 0 \quad \text{または} \quad \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 \neq 0$$

が成立せませうから

$$\vec{e}_1 \parallel \vec{b} \quad \text{または} \quad \vec{e}_2 \parallel \vec{b}$$

が成立せませう。