MSF2021L05 演習問題解答

I $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が条件 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を満たすとします.
(1) $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$ が $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ を満たすことを示しましょう.
(2) $x\vec{a} + y\vec{b} = s\vec{p} + t\vec{q}$ が成立するとき s, t を x, y で表しましょう.

解答 (1) $c_1\vec{p} + c_2\vec{q} = \vec{0}$ とします．このとき

$$\begin{aligned} c_1\vec{p} + c_2\vec{q} &= c_1(3\vec{a} + \vec{b}) + c_2(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= (3c_1 + c_2)\vec{a} + (c_1 + c_2)\vec{b} \end{aligned}$$

から

$$(3c_1 + c_2)\vec{a} + (c_1 + c_2)\vec{b} = \vec{0}$$

であることが分かります．さらに $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ c_1 & + & c_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

であることが従います．このとき $\left|\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 2 \neq 0$ であることに注意すると $c_1 = c_2 = 0$，従って $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ であることが分かります.

(2)

$$\begin{aligned} s\vec{p} + t\vec{q} &= s(3\vec{a} + \vec{b}) + t(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= (3s + t)\vec{a} + (s + t)\vec{b} \end{aligned}$$

であることから

$$x\vec{a} + y\vec{b} = (3s + t)\vec{a} + (s + t)\vec{b}$$

となります．さらに $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3s & + & t & = & x \\ s & + & t & = & y \end{array} \right.$$

であることが従います．これをクラメールの公式を用いて s, t について解くと $\left|\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 2 \neq 0$ から

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left|\begin{smallmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2}(x - y) \\ y &= \frac{1}{2}\left|\begin{smallmatrix} 3 & x \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{2}(3y - x) = \frac{1}{2}(3y - x) \end{aligned}$$

であることが分かります.

II 以下のベクトルの外積を計算しましょう.
(1) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ **(2)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ **(3)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$

解答 (1)

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \left|\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| \\ -\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| \\ \left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right| \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$$

(2)

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| \\ -\left|\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| \\ \left|\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right| \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$$

(3)

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right| \\ -\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right| \\ \left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right| \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$$

III(1) $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$ であるとき，$\vec{a},\vec{b}$ が作る平行四辺形の面積は

$$||\vec{a}\times\vec{b}||$$

であることを示しましょう．また

$$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{a})=(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b})=0$$

であることを示しましょう．（ここでは，3 次行列式を使わないで示しましょう．）

(2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^3$ とします．$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\neq\vec{0}$ であるとき，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が作る平行四面体の体積は

$$|(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})|$$

であることを示しましょう．

IV $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^3$ とします．このとき

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

とします．このとき

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_3&b_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\begin{vmatrix}b_2&a_2\\b_3&a_3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}b_1&a_1\\b_3&a_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}b_1&a_1\\b_2&a_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

さらに $\vec{a}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{a}$ から $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ が従います．

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}&=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2+b_2&c_2\\a_3+b_3&c_3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}a_1+b_1&c_1\\a_3+b_3&c_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_1+b_1&c_1\\a_2+b_2&c_3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_3&c_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_3&c_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_3&c_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_3\end{vmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_3&c_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_3\end{vmatrix}\end{pmatrix}\\&=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\end{aligned}$$

V $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^2$ が平行でないとします．$\vec{a},\vec{b}$ が定める平行四辺形の面積を S とするとき

$$S=\left||\vec{a}\ \vec{b}|\right|$$

が成立することを示しましょう．

VI 次の行列の積を計算しましょう．

(1) $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ **(7)** $\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(10)** $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

解答

(1)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha & 0\\ 0 & \cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+\lambda y\\ y\end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ \lambda x+y\end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\ y\end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \lambda+\mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$i.e.\quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \lambda\vec{a} + \vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$i.e.\quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda\vec{a}\ \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$i.e.\quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b}\ \vec{a})$$

VII $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします. 以下を計算しましょう。

(1) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(2)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, **(3)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(4)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **(5)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(6) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(7)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, **(8)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(9) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **(10)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(11) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(12)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

解答

(1)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{a}$$

(2)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{b}$$

(3)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{a}$$

(4)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{b}$$

(5)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{c}$$

(6)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} & 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

(7)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} & 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}\ \vec{a} \end{pmatrix}$$

(8)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}\end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

(9)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}\end{pmatrix} = (\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a})$$

(10)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}\end{pmatrix} = (\lambda\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

(11)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}\end{pmatrix} = (\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{c})$$

(12)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c} & 0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+\lambda\cdot\vec{c}\end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \lambda\vec{c})$$

VII 次の $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbf{R}^n$ に対して以下の (i),(ii),(iii),(iv) を示しましょう.
(i)$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ を示しましょう.
(ii)

$$L = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます.

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in L$$

を示しましょう.
(iii) $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ を示しましょう.
(iv) L の基底 $\vec{a}, \vec{b}$ に関する座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 基底 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ に関する座標 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ とするとき $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ で表しましょう.

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

解答 (1)(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ から $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ が従います.
(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -6 & 5 \\ -1 & 4 & 10 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha} = -2\vec{a} + 2\vec{b} \in L, \quad \vec{\beta} = 3\vec{a} + \vec{b} \in L$$

が分かります.
(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ において $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ から $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

が従います.

(2)(i) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0$ から $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ が従います.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 8\\ -1 & -2 & -2 & -5\\ 1 & 1 & 3 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha}=4\vec{a}-\vec{b}\in L,\quad \vec{\beta}=\vec{a}+2\vec{b}\in L$$

が分かります.

(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ において $\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=9\neq 0$ から $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

が従います.

(3)(i) $\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=11\neq 0$ から $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ が従います.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc}4 & 1 & 6 & -1\\ 1 & 3 & 7 & 8\\ -1 & 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0 & -5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 7 & 8\\ 4 & 1 & 6 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0 & -5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 7 & 8\\ 0 & -11 & -22 & -33\\ 0 & 4 & 8 & 12\\ 0 & -7 & -14 & -21\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 7 & 8\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 8 & 12\\ 0 & -7 & -14 & -21\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha} = \vec{a} + 2\vec{b} \in L, \quad \vec{\beta} = -\vec{a} + 3\vec{b} \in L$$

が分かります.

(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ において $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ から $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

が従います.

VIII

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が張る部分空間

$$L = L(\vec{a}, \vec{b}) = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます.

$$\vec{c}, \vec{d} \in L, \lambda, \mu \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda\vec{c} + \mu\vec{d} \in L$$

を示しましょう.

解答 $\vec{c}, \vec{d} \in L$ であるので

$$\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}, \quad \vec{d} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

と表されます．このとき

$$\begin{aligned} \vec{c} + \vec{d} &= x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + x_2\vec{a} + y_2\vec{b} \\ &= (x_1 + x_2)\vec{a} + (y_1 + y_2)\vec{b} \in L \\ \lambda\vec{c} &= \lambda(x_1\vec{a} + y_1\vec{b}) = (\lambda x_1)\vec{a} + (\lambda y_1)\vec{b} \in L \end{aligned}$$

となります．これから

$$\lambda\vec{c} + \mu\vec{d} \in L$$

が従います.

IX

(1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$${}^t(\vec{a} + \vec{b}) = {}^t\vec{a} + {}^t\vec{b}, \quad {}^t(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot {}^t\vec{a}$$

を示しましょう.

(2) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbf{R}^n)^*$ に対して

$${}^t(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = {}^t\mathbf{a} + {}^t\mathbf{b}, \quad {}^t(\lambda\mathbf{a}) = \lambda \cdot {}^t\mathbf{b}$$

を示しましょう.

解答

(1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{aligned} {}^t(\vec{a}+\vec{b}) &= {}^t\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_i+b_i \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = (a_1+b_1 \ \ldots \ a_i+b_i \ \ldots \ a_n+b_n) \\ &= (a_1 \ \ldots \ a_i \ \ldots \ a_n) + (b_1 \ \ldots \ b_i \ \ldots \ b_n) = {}^t\vec{a} + {}^t\vec{b} \\ {}^t(\lambda\vec{a}) &= {}^t\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = (\lambda a_1 \ \ldots \ \lambda a_i \ \ldots \ \lambda a_n) \\ &= \lambda(a_1 \ \ldots \ a_i \ \ldots \ a_n) = \lambda {}^t\vec{a} \end{aligned}$$

(2)

$$\mathbf{a} = (a_1 \ \ldots \ a_j \ \ldots \ a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1 \ \ldots \ b_j \ \ldots \ b_n)$$

とすると

$$\begin{aligned} {}^t(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= {}^t(a_1+b_1 \ \ldots \ a_j+b_j \ \ldots \ a_n+b_n) \\ &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_j+b_j \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = {}^t\mathbf{a} + {}^t\mathbf{b} \\ {}^t(\lambda\mathbf{a}) &= {}^t(\lambda a_1 \ \ldots \ \lambda a_j \ \ldots \ \lambda a_n) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot {}^t\mathbf{a} \end{aligned}$$

X

直線 ℓ_1

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x-2y+z+5=0 \end{cases}$$

直線 ℓ_2

$$\begin{cases} x-z+1=0 \\ 3x+2y-z+2=0 \end{cases}$$

があります．原点を通り直線 ℓ_1, ℓ_2 に交わる直線を求めましょう．

解答直線 ℓ_1 と原点を含む平面 π_1 は

$$5(x+y+z+1)-(3x-2y+z+5)=0 \quad \text{すなわち} \quad 2x+7y+4z=0 \tag{1}$$

他方，直線 ℓ_2 と原点を含む平面 π_2 は

$$2(x-z+1)-(3x+2y-z+2)=0 \quad \text{すなわち} \quad -x-2y-z=0 \tag{2}$$

であることが分かります．π_1 と π_2 の交わりは (1) かつ (2) を解いて

$$x=\frac{1}{3}z, \quad y=-\frac{2}{3}z \tag{3}$$

となる．この直線を ℓ とすると，ℓ が求める直線である．実際 ℓ_1 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ は π_1 に平行で

$$\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

が成立しますから π_1 中 ℓ_1 と ℓ は交わります．他方，ℓ_2 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ は π_2 に平行で

$$\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

が成立しますから π_2 中 ℓ_2 と ℓ は交わります．よって ℓ は原点を通り，ℓ_1 と ℓ_2 と交わります．